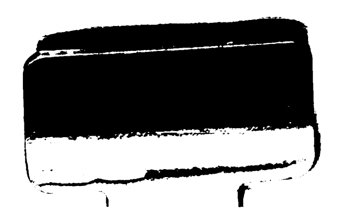
Jasinski. Recherches sur la flexion des pièces comprimées


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



À Monsieur le Professeur
Weck
hommage respectueux,
de l'auteur
2.XI.94.
St Petersbourg
Rue Pouchkinne N° 18

RECHERCHES

SUR LA FLEXION

DES

PIÈCES COMPRIMÉES

IMPRIMERIE C. MARPON ET E. FLAMMARION
RUE RACINE, 26, A PARIS.

RECHERCHES

SUR

LA FLEXION

DES

PIÈCES COMPRIMÉES

PAR

M. Félix JASIŃSKI

INGÉNIEUR DES VOIES DE COMMUNICATIONS

Extrait des ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES. — Septembre 1894.

PARIS

Vve CH. DUNOD & P. VICQ, ÉDITEURS

LIBRAIRES DES CORPS NATIONAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES, DES MINES
ET DES TÉLÉGRAPHES

49, Quai des Grands-Augustins, 49

1894

Prof. Alex. Ziwet
gt.
2-18-1923

RECHERCHES
SUR LA FLEXION
DES
PIÈCES COMPRIMÉES

CHAPITRE Ier.

THÉORIE.

§ 1. — *Aperçu sommaire des recherches antérieures.*

La possibilité d'une flexion des pièces comprimées a déjà attiré l'attention des plus anciens ingénieurs. Il est connu depuis longtemps que la résistance des colonnes dépend, non seulement des dimensions de leur section transversale, mais encore de leurs hauteurs (*).

La solution théorique du problème de la résistance de colonnes ne pouvait cependant pas être obtenue sans l'aide de l'analyse supérieure.

(*) Déjà, en 1729, Musschenbrœk (*Introductio ad cohærentiam corporum firmorum. Dissertationes physicæ experimentalis et geometricæ. Lugduni Batavorum*) a tiré de ses expériences la conclusion que la résistance des tiges élastiques comprimées dans le sens de leur longueur croît en raison inverse du carré de cette dernière.

Ce n'est que vers 1774 que le grand géomètre Léonard Euler (*) établit la base de la théorie de la résistance des pièces comprimées, partant de la loi approximative de son maître, Jean Bernoulli, suivant laquelle, en chaque point de l'axe fléchi d'une poutre élastique primitivement droite, le produit du rayon de courbure ρ et du moment fléchissant M est une constante W :

$$M\rho = W.$$

Parmi les neuf différents cas de flexion, Euler étudia celui d'une colonne cylindrique, encastrée à l'une de ses extrémités, et comprimée par une force appliquée à l'autre extrémité libre et dirigée suivant son axe primitif.

Se bornant à l'étude de très petites déformations, il simplifia l'expression du rayon de courbure

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

en y négligeant $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ devant l'unité, et adopta ainsi dans ses calculs l'expression simplifiée

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{d^2y}{dx^2}.$$

De ses recherches, il tira la conclusion qu'une colonne de longueur l_1, comprimée par une force P_1, n'est exposée à se courber que lorsque P_1 dépasse la valeur

$$P_1 = \frac{W\pi^2}{4l_1^2}.$$

Euler appelle cette force *la force de la colonne.*

(*) Voir son *Additamentum de curvis elasticis...* à son œuvre *Methodus inveniendi lineas curvas*, 1772. — Voir aussi son article inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1757.

Ne nous arrêtant pas à la déduction élémentaire de la théorie d'Euler, rappelons seulement qu'elle a donné lieu à beaucoup de malentendus et qu'elle a été même considérée comme un paradoxe mathématique.

Certains ingénieurs ont étendu à tort l'équation différentielle

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \pm M$$

au delà des limites dans lesquelles elle pouvait être applicable, et en ont tiré la conclusion que la force de compression ayant atteint la limite

$$P_1 = \frac{EI\pi^2}{4l_1^2}, \tag{1}$$

pourrait courber indéfiniment l'axe de la colonne suivant une sinusoïde, tandis que la moindre augmentation ou diminution de la valeur de cette force suffirait pour que l'axe de la colonne restât droit.

Il est évident que ces conclusions ne pouvaient être qu'erronées. En effet, l'analyse fondée sur l'expression simplifiée de la courbure était bien en état d'indiquer que la colonne n'est pas exposée à se courber tant que

$$P < \frac{EI\pi^2}{4l_1^2},$$

mais elle ne pouvait donner absolument aucune idée de ce qui se passerait si la force P_1 dépassait la limite (1).

L'admission d'une courbure indéfinie suppose nécessairement que $\frac{dy}{dx}$ peut prendre toutes les valeurs possibles, et elle exclue, par conséquent, l'hypothèse que le carré de cette fonction est négligeable devant l'unité, quand il s'agit de déterminer l'axe fléchi sous l'action de forces supérieures à la limite (1).

Aussi MM. Clebsch et de Saint-Venant (*) s'étonnent-ils, à juste titre, que l'on se soit efforcé de faire accepter un résultat aussi manifestement erroné, plutôt que d'en rechercher l'origine dans l'extension tout à fait arbitraire et inexacte de l'équation simplifiée de la flexion.

Est-il cependant bien vrai, que l'axe soit exposé à se courber lorsque la force P_1 dépasse la limite (1), et doit-il demeurer réellement droit tant que cette force reste au-dessous de la limite indiquée?

C'est Lagrange (**) qui a élucidé cette question, ayant prouvé l'exactitude de la formule d'Euler, à l'aide d'une analyse rigoureuse dans son mémoire célèbre *Sur la figure de la colonne*. Quant à l'équation de l'axe fléchi sous l'action des forces supérieures à la limite (1), Lagrange fait remarquer que son intégration n'était pas possible, étant donné l'état dans lequel se trouvait alors l'analyse, et qu'elle dépendait de la rectification des arcs des sections coniques.

Grâce au développement actuel de la théorie des fonctions elliptiques, et surtout aux travaux de MM. Clebsch, Maurice Lévy (***), Halphen (****), Collignon, etc., le problème de la flexion des tiges élastiques comprimées par des forces longitudinales appliquées aux extrémités de l'axe, repose sur une base absolument solide.

C'est M. Clebsch qui le premier a résolu ce problème

(*) *Théorie d'élasticité des corps solides* de Clebsch, traduite par Barré de Saint-Venant et Flamant, 1883, p. 864.

(**) Œuvres de Lagrange, t. II, p. 125, *Sur la figure de la colonne*, et *Miscenalea Faurinensia*, t. V, 1770-1773.

(***) Maurice Lévy : Sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications (*Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. XCVII, p. 694, et *Journal de mathématique*, 3e sér., t. X, p. 1).

(****) Halphen : Sur une courbe élastique (*Journal de l'École polytechnique*, 54e cahier, p. 183), et Halphen : *Traité des fonctions elliptiques*, 1888, t. II, p. 192.

à l'aide des fonctions elliptiques dans sa *Théorie d'élasticité des corps solides.* Après avoir prouvé l'exactitude de la formule (1), il développe en séries trigonométriques les coordonnées de l'axe fléchi d'une tige élastique comprimée par des forces longitudinales supérieures à la limite (1).

En même temps Clebsch s'étonne que l'analyse sommaire, fondée sur l'équation différentielle approximative, ait conduit à l'expression exacte (1) de la force maxima, qu'une pièce peut supporter sans fléchir; c'est ce qu'il appelle *un heureux hasard.* Ceci n'est cependant pas juste. Dans les recherches qui suivent, il sera prouvé d'une manière rigoureuse que, tant qu'il s'agit de déterminer la valeur critique de l'effort, on pourra toujours simplifier l'analyse en remplaçant l'équation différentielle exacte de l'axe courbé par une équation linéaire.

Dernièrement M. Maurice Lévy a étudié la figure d'équilibre d'une verge élastique, circulaire ou droite dans son état naturel, et sollicitée :

1° Par des forces ou couples quelconques, agissant en ses extrémités dans le plan de la fibre moyenne;

2° Par une pression uniformément répartie sur cette fibre dans son plan et lui restant toujours normale dans les déformations.

Pour le cas particulier considéré par Euler, M. Lévy trouve que si l'on a

$$(2n+1) < \frac{2l_1}{\pi}\sqrt{\frac{P}{EI}} < (2n+3),$$

(où n est un nombre entier et positif), il existe, outre la figure droite, $n+1$ figures d'équilibre. Ces recherches rigoureuses ont affirmé ainsi le résultat bien connu, déduit de l'équation approximative, que, pour les valeurs de la force de compression déterminées d'après la relation

$$(a) \qquad P = \frac{EI\pi^2}{4l_1^2}(2n+1)^2,$$

l'axe peut fléchir selon une forme nouvelle d'équilibre, outre celles qu'il aurait pu affecter sous l'action des forces inférieures. Mais toutes ces formes d'équilibre de l'axe se confondent avec sa direction primitive droite pour les valeurs de l'effort (*a*), et s'en écartent d'une manière parfaitement déterminée au fur et à mesure que cet effort augmente.

Après avoir prouvé ainsi qu'il existe une relation continue et bien déterminée entre l'effort de compression supérieur à la limite (1) et la flèche maxima de l'axe courbe d'une pièce parfaitement élastique, il restait encore à se rendre compte de ce qui se passe dans une pièce réelle chargée debout, lorsqu'elle est exposée à fléchir.

M. Collignon éclaircit parfaitement cette question dans son mémoire : *Sur la flexion des pièces droites comprimées* (*).

Après l'étude purement géométrique des courbes représentées par l'équation exacte de l'axe fléchi

$$\rho y = -\frac{EI}{P},$$

il cherche la charge de la matière au point le plus fatigué d'une pièce réelle, exposée à fléchir sous l'action d'une force de compression supérieure à la limite (1).

En se servant de l'expression bien connue

$$R = \frac{P}{\omega} + \frac{Mv}{I},$$

M. Collignon démontre que la charge R croît très rapidement dès que la force P surpasse insensiblement la valeur (1), et qu'elle peut atteindre très vite les limites dangereuses. Cela le ramène à dire, conformément au

(*) *Annales des ponts et chaussées*, janvier 1889.

résultat de la théorie sommaire, que toute pièce qui commence à fléchir est, en général, exposée à se rompre.

En terminant cet aperçu sommaire, il est à peine utile de remarquer que la formule d'Euler (1), ainsi que tout ce qui en dérive, est fondée sur la supposition que la pièce comprimée est parfaitement élastique. Cette formule, par conséquent, peut servir à déterminer l'effort de compression dangereux, tant que la charge qu'il pourrait produire par unité de surface est inférieure à la limite d'élasticité de la matière dont se compose la pièce.

Le module de l'élasticité cessant d'être constant au delà de cette limite, la théorie d'Euler n'est plus applicable, et il faut avoir recours aux expériences et aux formules empiriques. Nous nous en occuperons au chapitre II, tandis qu'ici, dans les recherches théoriques, nous ne considérerons que des pièces parfaitement élastiques.

§ 2. — *Quatre cas de pièces chargées debout. Cas principal. Coefficient de longueur.*

Outre le premier cas considéré par Euler, sa théorie s'étend facilement aux trois cas suivants de la flexion des tiges comprimées par des efforts longitudinaux, appliqués aux extrémités de leurs axes :

a) Au 2ᵉ cas (*fig.* 1).

Quand les deux extrémités sont libres, l'effort dangereux sera

$$(2) \qquad P_2 = \frac{E I \pi^2}{l_2^2}.$$

Nous regarderons ce cas comme le *cas principal*.

b) Au 3ᵉ cas (*fig.* 2).

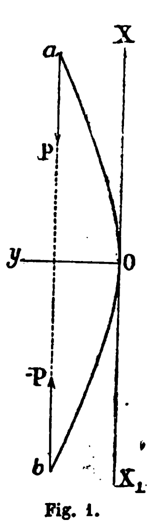


Fig. 1.

Quand les extrémités de l'axe sont encastrées, on aura

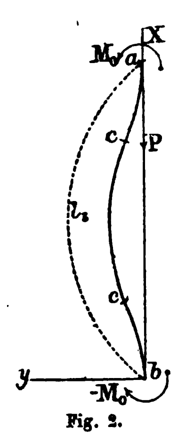


Fig. 2.

$$(3)\qquad P_3 = \frac{4EI\pi^2}{l_3^2}.$$

c) Au 4e cas (*fig.* 3).

Quand une des extrémités est encastrée, tandis que l'autre reste astreinte à demeurer sur la droite de l'axe primitif, on aura

$$(4)\qquad P_4 = \frac{2.04\,hEI\pi^2}{l_4^2}.$$

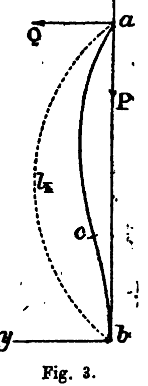


Fig. 3.

Nous nous abstiendrons d'exposer les déductions de ces formules bien connues; nous allons seulement les transformer pour les rendre plus aptes aux applications.

En désignant par ω la surface de la section transversale de la pièce; par r son rayon de giration et par β la charge de compression dangereuse par unité de surface, nous aurons

$$P = \beta\omega \quad \text{et} \quad I = \omega r^2.$$

En substituant ceci dans la formule (2) du *cas principal*, nous obtenons la valeur suivante de la charge dangereuse :

$$(2_1)\qquad \beta_2 = E\pi^2\left(\frac{r}{l}\right)^2.$$

De même, dans les trois autres cas,

$$(1_1)\qquad \beta_1 = E\pi^2\left(\frac{r}{2\,l_1}\right)^2,$$

$$(3_1)\qquad \beta_3 = E\pi^2\left(\frac{r}{6{,}5\,l_3}\right)^2,$$

$$(4_1)\qquad \beta_4 = E\pi^2\left(\frac{r}{0{,}7\,l_4}\right)^2.$$

On peut exprimer toutes ces formules par la formule générale

$$\text{(I)} \qquad \beta_n = E\pi^2\left(\frac{r}{\mu_n l_n}\right)^2,$$

où le coefficient μ_n a les valeurs suivantes :

$$(1_2) \qquad \mu_1 = 2,$$
$$(3_2) \qquad \mu_3 = 0{,}5,$$
$$(4_2) \qquad \mu_4 = 0{,}7.$$

Nous appellerons ce nombre μ le *coefficient de longueur*.

Ainsi, dans tous ces cas, la charge dangereuse peut être calculée d'après la formule du *cas principal* (2_1), en y substituant à l la longueur réduite de la pièce, égale au produit de sa longueur réelle l_n par le coefficient μ_n,

$$l = \mu_n l_n,$$

d'où l'on déduit

$$\mu_n = \frac{l}{l_n}.$$

Le coefficient de longueur représente donc le rapport entre les longueurs réelles de deux tiges à sections égales qui commencent à fléchir sous les mêmes valeurs de la charge dangereuse β : la première tige étant placée dans les conditions du cas principal et l'autre dans celles du cas considéré.

§ 3. — *Bases principales de nos recherches. Expression de la courbure. Équation différentielle de l'axe fléchi.*

Dans ce chapitre, nous essayerons de déterminer le coefficient de longueur pour certains cas de flambement qui, jusqu'à présent, n'ont pas encore été étudiés, et qui nous semblent avoir une importance pratique.

Nous ne nous occuperons que de la flexion plane, et nous supposerons que les efforts de compression soient dirigés suivant l'axe primitif absolument rectiligne de

la pièce. Ensuite, dans la note B, nous étudierons l'influence d'une légère courbure de l'axe primitif et d'un petit écart entre le point d'application de l'effort et l'extrémité de l'axe.

C'est ainsi que nous tâcherons de nous rapprocher des conditions réelles dans lesquelles se trouvent ordinairement les pièces comprimées, par suite des vices inévitables de construction et de l'imperfection des matériaux.

Nous avons pris pour base de nos recherches la loi approximative de Bernoulli exprimée par l'équation

$$\mathrm{EI}\,\frac{1}{\rho} = \pm \mathrm{M},$$

qui n'est exacte que dans le cas d'une verge élastique, dont les dimensions latérales sont très petites par rapport à sa longueur.

En vue de la simplification de l'analyse, il nous a paru utile d'exprimer la courbure $\frac{1}{\rho}$ en fonction de la longueur de l'arc s et de l'ordonnée y.

On sait que l'on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds};$$

α est l'angle formé par la tangente avec l'axe des x.

Mais

$$\alpha = \arcsin \frac{dy}{dx},$$

donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}.$$

En substituant cette équation dans l'équation de Bernoulli, nous obtenons l'équation différentielle suivante

de l'axe fléchi d'une verge élastique :

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{F\,I}\,\frac{\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2}} = \mathrm{M}.$$

§ 4. — 5e *Cas.*

Considérons une tige élastique *ab* (*fig.* 4), ayant une de ses extrémités (*a*) encastrée et l'autre (*b*) libre, comprimée par une force longitudinale, uniformément répartie sur l'axe à raison de p unités de poids par unité de longueur et dirigée vers l'extrémité encastrée. Tant qu'il n'y aura pas en jeu d'autres forces ou couples quelconques, pouvant occasionner la flexion de l'axe de la tige dans une certaine direction plutôt que dans les autres, cet axe devra rester absolument droit, et ne subira qu'une simple contraction de sa longueur. Nous négligerons cette insignifiante déformation, ainsi que son influence sur la répartition de la force le long de l'axe, et nous admettrons que cette dernière ne cesse pas d'être uniforme, c'est-à-dire qu'à chaque élément $d\sigma$ sera appliquée une force $pd\sigma$, où p est une constante.

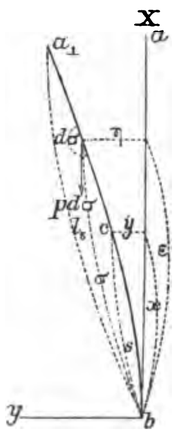


Fig. 4.

Supposons qu'une cause extérieure quelconque ait fait dévier l'axe de sa direction droite et tâchons de trouver la valeur minima du coefficient p indispensable pour que l'axe puisse conserver un état d'équilibre curviligne après la disparition de cette cause. Plaçons le centre des ordonnées rectangulaires à l'extrémité encastrée b, en dirigeant l'axe des x suivant l'axe primitif de la tige *ab* et l'axe des y dans le sens de la flexion.

Le moment fléchissant au point c, dont les coordonnées sont y et x, est égal à la somme des moments des forces appliquées à tous les éléments de l'axe depuis l'extrémité a jusqu'à c. Le moment élémentaire dM_s des forces appliquées à un élément infiniment petit de l'axe $d\sigma$ par rapport au point c sera

$$dM_s = p(\eta - y)d\sigma,$$

où η est l'ordonnée du point placé au milieu de l'élément $d\sigma$, et σ la longueur de l'arc comprise entre ce point et l'extrémité encastrée b.

Le moment M_s sera exprimé par la fonction

$$M_s = p\int_s^{l_s}(\eta - y)d\sigma = p\int_s^{l_s}\eta\, d\rho - py(l_s - s).$$

En substituant cette expression dans l'équation (II), nous trouvons

$$(a) \qquad p = \frac{\mathrm{EI}\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2}\left[\displaystyle\int_s^{l_s}\eta\, d\sigma - y(l_s - s)\right]}.$$

Il s'agit de déterminer la valeur minima p_1 pour laquelle la flexion de l'axe devient possible, c'est-à-dire au-dessous de laquelle son équation se réduit à

$$y = \text{const} = 0.$$

Mais en remplaçant par 0 dans l'équation (a) la fonction y et toutes ses dérivées par rapport à s, nous obtenons pour p_1 une solution indéterminée

$$p_1 = \frac{0}{0}.$$

Il en résulte que, pour toutes valeurs du coefficient p_1, l'axe peut conserver sa forme droite. Mais, en dehors de cet état principal, il existe encore d'autres formes curvilignes d'équilibre qui ne coïncident avec l'axe des x

que pour des valeurs particulières $p=p_1$. On pourra déterminer ces valeurs comme des limites vers lesquelles tend le deuxième membre de l'équation (a), quand la fonction y et toutes ses dérivées tendent vers 0, pour toutes les valeurs de s comprises entre 0 et l_s.

$$p_1 = \lim. \left\{ \frac{\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\left[\int_s^{l_s}\eta\, d\sigma - y(l_s - s)\right]} \right\}_{y=\mathrm{const}=0,}$$

ou, en développant $\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$ selon la formule du binôme,

$$p_1 = \lim \left\{ \frac{\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{ds^2}}{\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{dy}{ds}\right)^4-\ldots\right]\left[\int_s^{l_s}\eta\, d\sigma - y(l_s -)\right]} \right\}_{y=\mathrm{const.}=0.}$$

La relation graduellement continue entre la force et la flèche exige que, pour toutes les valeurs de p qui dépassent la limite p_1 d'une quantité infiniment petite dp, la fonction y et toutes ses dérivées par rapport à s n'aient que des valeurs infiniment petites pour toute la longueur de l'axe entre $s=0$ et $s=l_s$. Il est connu que la limite vers laquelle tend le rapport de deux quantités infiniment petites tendant vers 0, reste invariable lorsqu'on augmente ou diminue ces dernières de quantités infiniment petites d'ordre supérieur. Nous pouvons donc, dans l'équation (a), négliger devant l'unité les degrés supérieurs de la dérivée $\frac{dy}{ds}$ qui, pour toute la longueur de l'axe, tend vers 0 lorsque p tend vers (*) p_1.

(*) Cela montre, qu'en général, la valeur minima de l'effort de compression capable de produire la flexion de l'axe d'une pièce primitivement droite, peut être rigoureusement déterminée, non seulement par l'équation différentielle exacte de l'axe fléchi, mais encore par toute équation différentielle obtenue

Il s'ensuit que

$$(d) \qquad p_1 = \lim. \left[\frac{EI \frac{d^2y}{ds^2}}{\int_s^{l_s} \eta\, d\sigma - y(l_s - s)} \right]_{y=\text{const}=0.}$$

Pour déterminer la vraie valeur de la limite (d), il faudrait d'abord intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{p}{EI}\left[\int_s^{l_s} \eta\, d\sigma - y(l_s - s)\right].$$

On obtient par la différentiation de cette équation,

$$(e) \qquad \frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{p}{EI}(l_s - s)\frac{dy}{ds}.$$

En substituant dans l'équation (e) aux variables y et s de nouvelles variables θ et u, reliées aux premières par les équations :

$$(f) \qquad \theta = \frac{dy}{ds}, \qquad \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d^3y}{ds^3};$$

$$(g) \qquad \begin{cases} u = \left(\frac{s}{l_s} - 1\right), & \frac{du}{ds} = \frac{1}{l_s}, \\ \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{du}\frac{du}{ds} = \frac{1}{l_s}\frac{d\theta}{du}, & \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{1}{l_s}\frac{d^2\theta}{du^2}, \end{cases}$$

---

en ajoutant à l'équation exacte ou en en soustrayant les degrés supérieurs des fonctions y, y', y'', etc., à leurs degrés inférieurs, ainsi qu'à toute quantité finie. Ceci explique comment Euler, en partant de l'équation différentielle approximative, ait pu parvenir à la solution exacte du problème de la force de la colonne. Effectivement, pour ce cas (*fig.* 1), nous trouvons :

$$P_1 = \lim. \left[\frac{EI \frac{d^2y}{ds^2}}{(\delta - y)\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}} \right]_{y=\text{const}=0} = \lim. \left[\frac{EI \frac{dy^2}{ds^2}}{(\delta - y)} \right]_{y=\text{const}=0}$$

C'est à ces considérations, et non pas *à l'heureux hasard* dont parle Clebsch, qu'il convient d'attribuer le résultat en question.

nous trouverons

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = \theta u l_5^3 \frac{p}{\mathrm{EI}}.$$

En faisant

$$(h) \qquad \frac{p l_5^3}{\mathrm{EI}} = a^2,$$

nous arrivons définitivement à l'équation différentielle

$$(i) \qquad \frac{d^2\theta}{du^2} = a^2 u \theta.$$

Nous avons effectué l'intégration de cette équation à l'aide des séries, en employant la méthode connue des coefficients indéterminés, et nous avons trouvé ainsi l'intégrale suivante :

$$(k) \qquad \theta = \mathrm{C}_1\theta_1 + \mathrm{C}_2\theta_2,$$

où l'on a :

$$(l) \qquad \begin{cases} \theta_1 = 1 + \sum_{\infty}^{2} \dfrac{a^{2n-2}u^{3n-3}}{2.3.5.6\ldots(3n-4)(3n-3)}, \\ \theta_2 = u + \sum_{\infty}^{2} \dfrac{a^{2n-2}u^{3n-2}}{3.4.6.7\ldots(3n-3)(3n-2)}. \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes arbitraires C_1 et C_2, nous avons les conditions suivantes : on voit, par la *fig.* 5, que pour les extrémités libres $s = l_5$, ou d'après (*g*) pour $u = 0$, le moment fléchissant est égal à 0, et à cause de (II) il faut que l'on ait

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_{s=l_5} = \frac{1}{l_5}\left(\frac{d\theta}{du}\right)_{u=0} = 0.$$

Mais d'après (*k*), on a

$$\frac{d\theta}{du} = \mathrm{C}_1\frac{d\theta_1}{du} + \mathrm{C}_2\frac{d\theta_2}{du},$$

d'où l'on déduit

$$(m) \qquad \mathrm{C}_1\frac{d\theta_1}{du} + \mathrm{C}_2\frac{d\theta_2}{du} = 0.$$

En différentiant les séries θ_1 et θ_2, nous trouvons

$$\left(\frac{d\theta_1}{du}\right)_{u=0}=\left[\sum_{\infty}^{2}\frac{(3n-3)a^{2n-2}u^{3n-4}}{2.3.5.6\ldots(3n-4)(3n-3)}\right]_{u=0}=0.$$

$$\left(\frac{d\theta_2}{du}\right)_{u=0}=\left[1+\sum_{\infty}^{2}\frac{(3n-2)a^{2n-2}u^{3n-3}}{3.4.6.7\ldots(3n-3)(3n-2)}\right]_{u=0}=1.$$

Donc, pour que l'équation (m) puisse avoir lieu, il faut que l'on ait

$$C_2=0,$$

et par conséquent

$$(n)\qquad \theta=C_1\theta_1.$$

Or comme

$$\theta=\frac{dy}{ds}=\sin\varphi,$$

où φ est l'angle formé par la tangente au point $C(y, s)$ de la courbe avec l'axe des x, et comme, d'autre part l'extrémité b de l'axe est encastrée, nous obtenons

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)_{s=0}=(\theta)_{u=-1}=C_1(\theta_1)_{u=-1}=0,$$

et, d'après (l),

$$(o)\qquad C_1\left[1+\sum_{\infty}^{2}\frac{a^{2n-2}(-1)^{3n-3}}{2.3.5.6\ldots(3n-4)(3n-3)}\right]=0.$$

Cette équation peut être satisfaite :

1°) par $C_1=0$ ou

2°) par des valeurs de a^2 qui annulent l'expression entre accolades.

Dans le premier cas, nous aurons

$$\theta=0 \quad \text{et} \quad y=0,$$

ce qui correspond à la forme principale droite de l'axe, possible pour toutes les valeurs de a^2.

Dans le second cas, l'équation

$$(p)\qquad 1+\sum_{\infty}^{2}\frac{a^{2n-2}(-1)^{3n-3}}{2.3.5.6\ldots(3n-4)(3n-3)}=0$$

montre que la flexion de l'axe devient possible pour toutes les racines a_m^2 de l'équation (p).

Pour chacune de ces racines, l'équation (e) nous donne toute une famille de courbes, représentées par l'équation différentielle

$$(q) \qquad \frac{dy}{ds} = C_1(\theta_1)_{a_2 = a_m^2}.$$

Dans cette famille il y aura toujours une courbe particulière qui se confondra avec l'axe des x (*).

Donc, en vertu de (h) et (d), nous trouvons qu'à chaque racine positive a_m^2 de l'équation (p) correspond la possibilité du commencement de la flexion de l'axe selon une nouvelle courbe, outre celles qu'il pourrait affecter pour des valeurs de a^2 inférieures à la racine a_m^2.

Pour toutes les valeurs a^2 ***inférieures à la première racine positive de l'équation*** (p), ***l'axe n'admet qu'une seule forme d'équilibre en ligne droite; il ne peut donc pas fléchir.***

La valeur minima, a_1^2, *qui peut produire une flexion de l'axe est égale à la plus petite racine positive de l'équation* (p).

En calculant cette racine par approximations successives, on trouve

$$a_1^2 = 7{,}837$$

et, en substituant dans (h),

$$\frac{p_1 l_5^3}{EI} = 7{,}837,$$

d'où l'on tire

$$p_1 = 7{,}837 \, \frac{EI}{l_5^3}.$$

En désignant par P_5 et β_5 l'effort dangereux agissant au point de l'axe b, et la charge correspondante par

(*) Pour $C_1 = 0$.

unité de surface, nous aurons

$$(5) \qquad P_5 = p_1 l_5 = 7,837 \frac{EI}{l_5^2},$$

$$(5_1) \qquad \beta_5 = 7,838\, E \left(\frac{r}{l_5}\right)^2.$$

Les équations (5_1) et (II), nous donnent la valeur suivante du coefficient de longueur :

$$(5_2) \qquad \mu_5 = \frac{R}{\sqrt{7,837}} = 1,12.$$

Les formules du 5e cas que nous venons d'établir, peuvent servir à résoudre le problème purement théorique de la longueur maxima d'une tige élastique verticale, qui ayant une de ses extrémités encastrée, peut supporter son propre poids sans fléchir. En admettant approximativement, que ce poids puisse être représenté par un effort uniformément réparti sur toute la longueur de l'axe, et en désignant le poids spécifique de la matière de la tige par Δ, et sa longueur maxima par λ_{max}, nous trouverons aisément d'après l'équation (5_1)

$$\beta_5 = \Delta \lambda_{max} = 7,837\, E \left(\frac{r}{\lambda_{max}}\right)^2,$$

et

$$(5_3) \qquad \lambda_{max} = \sqrt[3]{7,837\, E \frac{r^2}{\Delta}}.$$

Cette valeur est ordinairement de beaucoup inférieure à la longueur maxima λ'_{max}, d'une pièce élastique, qui, ayant une section égale à celle de la tige précédente, et étant suspendue par une de ses extrémités, peut porter son propre poids sans se rompre. Déterminons par exemple λ_{max} et λ'_{max} pour une tige de fer à section circulaire d'un diamètre de 1 centimètre; admettant la charge de rupture $I = 3$ *tonnes par centimètre carré*, le module d'élasticité $E = 2$ *tonnes par centimètre carré*,

et $\Delta = 0{,}0077$ *kilogrammes par centimètre cube*, on trouve aisément

$$\lambda'_{max} = \frac{I}{\Delta} = \frac{3000}{0{,}0077} = 3896 \text{ m.},$$

tandis que d'après l'équation (5_2)

$$\lambda_{max} = 5{,}03 \text{ m.}$$

Donc, dans ce cas particulier, λ'_{max} est presque 800 fois plus grand que λ_{max}. Il est évident que ce rapport diminue quand le diamètre augmente.

§ 5. — 6e *Cas.*

Les formules du cas précédent peuvent être appliquées à une tige *ab* (*fig.* 5), qui a ses deux extrémités libres, et qui est comprimée par des forces uniformément réparties le long de l'axe, symétrique par rapport à son milieu, et dirigées vers lui. Il est évident que, dans ce cas, chaque moitié de la tige se trouve bien dans les conditions du 5e cas, et par conséquent on peut appliquer ici les formules (5), (5_1) et (5_2) en substituant $\frac{l_6}{2}$ à l_5, l_6 représentant la longueur totale de la tige. De cette manière on obtient :

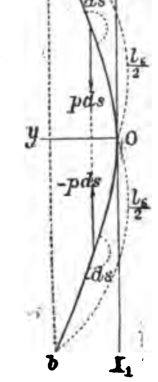


Fig. 5.

(6) $$P_6 = 31{,}348 \frac{EI}{l_6^2},$$

(6_1) $$\beta_6 = 31{,}348 \, E \left(\frac{r}{l_6}\right)^2,$$

(6_2) $$\mu_6 = 0{,}56.$$

§ 6. — 7e *Cas.*

Considérons une tige élastique *ab* (*fig.* 6), dont une extrémité *b* est encastrée et l'autre *a* libre, comprimée

par un effort réparti d'une manière continue le long de l'axe et de telle manière, que la charge qu'il produit par unité de longueur en chaque point croisse proportionnellement à la distance entre ce point et l'extrémité encastrée.

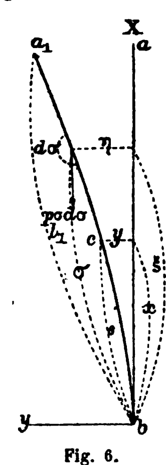


Fig. 6.

En négligeant, comme au 5ᵉ cas, la contraction insensible de la longueur de la tige, ainsi que l'influence de cette déformation sur la répartition de la charge le long de l'axe, nous pouvons admettre qu'à chaque élément infiniment petit de l'axe $d\sigma$ est appliqué l'effort longitudinal $p\sigma\, d\sigma$, où σ représente la longueur de l'arc, comprise entre le milieu de cet élément et l'extrémité encastrée.

Le moment fléchissant M_s, par rapport au point $c(s, y)$, est égal à la somme des moments des forces appliquées à tous les éléments de l'axe depuis l'extrémité libre a jusqu'au point c.

En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, nous obtiendrons l'expression suivante pour le moment des forces appliquées à un élément infiniment petit de l'axe $d\sigma$, par rapport au point c,

$$dM_s = (\eta - y)\, p\sigma d\sigma,$$

où η et σ représentent l'ordonnée et la longueur de l'arc, correspondant au milieu de l'élément $d\sigma$. Donc

$$(a)\qquad M_s = p\int_s^{l_1}(\eta - y)\,\sigma d\sigma = p\int_s^{l_1}\eta\sigma d\sigma - \frac{1}{2}py\,(l_1^2 - s^2).$$

En substituant cette expression dans l'équation (II), nous obtenons

$$(b)\qquad p = \frac{EI\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2}\left[\displaystyle\int_s^{l_1}\eta\sigma d\sigma - \frac{1}{2}y(l_1^2 - s^2)\right]}.$$

Il s'agit, comme dans les cas précédents, de déterminer la valeur minima p_1 au-dessous de laquelle la flexion de l'axe est impossible, c'est-à-dire au-dessous de laquelle son équation se réduit à

$$y = \text{const} = 0.$$

Cette valeur peut être obtenue au moyen de l'équation suivante :

$$(c)\quad p_1 = \lim \left\{ \frac{\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\left[\int_s^{l_7} \eta\sigma d\sigma - \frac{1}{2}y\,(l_7^2 - s^2)\right]} \right\}_{y=\text{const}=0}$$

$$= \lim \left\{ \frac{\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{ds^2}}{\int_s^{l_7} \eta\sigma d\sigma - \frac{1}{2}y\,l_7^2 - s^2)} \right\}_{y=\text{const}=0.}$$

Pour trouver la vraie valeur de cette expression indéterminée, il suffira d'intégrer l'équation différentielle approximative

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{p}{\mathrm{EI}}\left[\int_s^{l_7} \eta\sigma d\sigma - \frac{1}{2}y\,(l_7^2 - s^2)\right].$$

Par la différentiation de cette équation, on obtient

$$(e)\qquad \frac{d^3y}{ds^3} = \frac{1}{2}\,\frac{p\,l_7^2}{\mathrm{EI}}\left(\frac{s^2}{l_7^2} - 1\right)\frac{dy}{ds}.$$

En substituant dans cette équation aux variables y et s d'autres variables θ et u, liées aux premières par les relations :

$$(f)\qquad \theta = \frac{dy}{ds};\quad \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d^3y}{ds^3},$$

$$(g)\qquad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{s}{l_7};\quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{l_7}, \\ \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{l_7}\frac{d\theta}{du};\quad \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{1}{l_7^2}\frac{d^2\theta}{du^2}, \end{array} \right.$$

nous trouvons

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = \frac{1}{2}\,\frac{pl_7^4}{\mathrm{EI}}\,(u^2 - 1)\,\theta,$$

et, en faisant

$$(h) \qquad \frac{1}{2}\frac{pl_1^4}{EI} = a^2,$$

nous arrivons définitivement à l'équation différentielle

$$(i) \qquad \frac{d^2\theta}{du^2} = a^2(u^2 - 1)\,\theta.$$

Nous avons effectué l'intégration de cette équation par les séries, en nous servant d'une méthode analogue à celle des coefficients indéterminés, et avons trouvé l'intégrale générale suivante :

$$(k) \quad \begin{cases} \theta = C_1\theta_1 + C_2\theta_2, \\ \theta_1 = 1 + \sum_\infty^2 \frac{a^2 u^{2n-2}}{(2n-3)(2n-2)}(A_{n-3} - A_{n-1}), \\ \theta_2 = u + \sum_\infty^2 \frac{a^2 u^{2n-2}}{(2n-2)(2n-1)}(A'_{n-3} - A'_{n-1}), \end{cases}$$

où A_m et A'_m désignent les coefficients des $m^{\text{ièmes}}$ membres des séries θ_1 et θ_2 avec les conditions

$$A_0 = A'_0 = 0, \quad A_1 = A'_1 = 1.$$

Pour déterminer les constantes arbitraires C_1 et C_2, nous avons les conditions suivantes :

$$\text{pour } s = 0 \text{ il faut qu'on ait } \frac{dy}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\text{pour } u = 0 \quad \theta = 0,$$

ou

$$(\theta)_{u=0} = C_1(\theta_1)_{u=0} + C_2(\theta_2)_{u=0} = 0.$$

Or, d'après l'équation (k), on a

$$(\theta_1)_{u=0} = 1 \quad \text{et} \quad (\theta_2)_{u=0} = 0;$$

par conséquent

$$C_1 = 0,$$

et en définitive

$$(l) \qquad \theta = C_2\theta_2.$$

Ensuite, pour l'extrémité libre b, le moment fléchissant $M_1 = 0$; ce qui, d'après (a), est possible à condition qu'on ait

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_{s=l_7} = 0,$$

c'est-à-dire que

$$C_2 \left(\frac{d\theta_2}{du}\right)_{u=1} = 0.$$

Cette équation peut être satisfaite par

$$C_2 = 0$$

ou par

$$(m) \qquad \left(\frac{d\theta_2}{du}\right)_{u=1} = 0.$$

Dans le premier cas, nous aurons

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

ce qui démontre que l'axe peut conserver la forme droite pour toutes les valeurs possibles de a^2. Le second cas nous prouve que la flexion de l'axe devient possible pour toutes valeurs a_m^2 qui sont racines de l'équation (m).

C'est ainsi que nous arrivons à la conclusion *que, pour toutes les valeurs* a² *inférieures à la première racine de l'équation* (m), *il n'y a de possible pour l'axe qu'une seule forme droite d'équilibre; il ne peut donc pas fléchir.*

La valeur minima a_1^2, *qui peut produire une flexion de l'axe, est égale à la plus petite racine positive de l'équation* (m).

En calculant cette racine par approximations successives, nous trouvons

$$a_1^2 = 5{,}125,$$

et en substituant dans (h)

$$\frac{p_1 l_7^4}{2EI} = 5{,}125,$$

d'où l'on déduit

$$p_1 = 10,25\,\frac{EI}{l_7^4}.$$

En désignant par P_7 et β_7 l'effort dangereux au point b de l'axe et sa charge correspondante par unité de surface, nous aurons :

$$(7) \qquad P_7 = \frac{p_1 l_7^2}{2} = 5,125\,E\,\frac{EI}{l_7^2},$$

$$(7_1) \qquad \beta_7 = 5,125\,E\left(\frac{r}{l_7}\right).$$

Les équations (7) et (II) nous donnent la valeur suivante du coefficient de longueur

$$(7_2) \qquad \mu_7 = \frac{\pi}{\sqrt{5,125}} = 1,387\,h_e.$$

§ 7. — 8e *Cas.*

On peut étendre les formules du septième cas à une tige ab (*fig.* 7) se trouvant dans les mêmes conditions que celle du sixième cas, mais en admettant que les efforts répartis le long de l'axe, tout en restant symétriques par rapport à son milieu et dirigés vers lui, produisent une charge de compression par unité de longueur, non pas uniforme, mais croissante proportionnellement à la distance comprise entre son point d'application et le milieu de l'axe. Il suffira de substituer dans les formules (7), (7_1) et (7_2), $l_7 = \frac{l_8}{2}$, où l_8 représente la longueur de la tige, pour arriver aux relations :

Fig. 7.

(8) $$P_8 = 20,5 \frac{EI}{l_8^2},$$

(8₁) $$\beta_8 = 20,5\, E\left(\frac{r}{l_8}\right)^2,$$

(8₂) $$\mu_8 = 0,6938.$$

§ 8. — 9ᵉ *Cas.*

Considérons une tige élastique *ab* (*fig.* 8) de longueur l_9, dont les extrémités, tout en pouvant pivoter librement dans le plan de la flexion, sont astreintes à rester sur la droite *ab* qui les joint. Admettons que cette tige soit soumise à l'action des efforts de compression répartis, comme dans le cas précédent, le long de l'axe, et à une réaction continue répartie le long de l'axe, perpendiculaire à la droite *ab* et dirigée vers elle, produisant par unité de longueur une charge qui, en chaque point, est proportionnelle à sa distance de la droite *ab*. Cette réaction est donc une force qui apparait avec la flexion de l'axe et qui tend à le ramener dans sa position primitive.

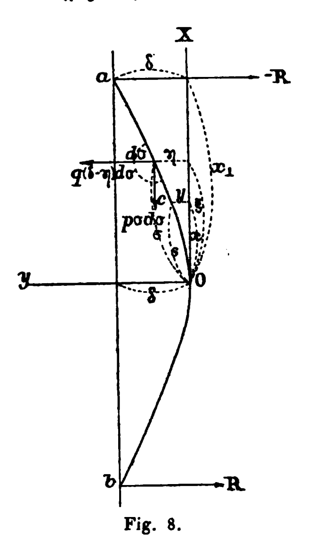


Fig. 8.

En négligeant, comme dans le cas précédent, la contraction insignifiante de l'axe, nous trouverons que, sur chaque élément infiniment petit de l'axe $d\sigma$ est appliqué un effort de compression $p\sigma d\sigma$ et une réaction $q(\delta - \eta)d\sigma$, expressions dans lesquelles p et q sont des constantes, et σ, η, δ représentent respectivement : la longueur de l'arc comprise entre le point 0 et le milieu de l'élément $d\sigma$, l'ordonnée de ce point, et la flèche maxima de l'axe.

La résultante des efforts de compression, appliqués sur toute la longueur de l'axe entre les extrémités a et b, est évidemment égale à 0, tandis que la résultante des réactions est égale à

$$2\,\mathrm{R} = q\int_{-\frac{1}{2}l_0}^{\frac{1}{2}l_0}(\delta_{,}-\eta)\,d\sigma.$$

Cette résultante $2\mathrm{R}$ est équilibrée par les réactions appliquées aux extrémités a et b, et qui les empêchent de se détacher de la droite ab. Ces réactions sont évidemment perpendiculaires à ab et égales chacune à

$$(a) \qquad -\mathrm{R} = -\int_0^{\frac{1}{2}l_0}(\delta-\eta)\,d\sigma = -\frac{1}{2}q\delta l_0 + q\int_0^{\frac{1}{2}l_0}\eta\,d\sigma.$$

Il s'agit de déterminer la relation nécessaire entre les coefficients p et q, pour que la flexion puisse commencer.

Plaçons le centre des coordonnées rectangulaires au milieu de l'axe fléchi sans points d'inflexion et dirigeons l'axe des x parallèlement à la droite ab; par raisons de symétrie, ce dernier sera tangent à l'axe fléchi de la tige.

Désignons, pour abréger, la demi-longueur de l'axe de la tige par $l = \frac{1}{2}\,l_0$, nous aurons pour un point quelconque $c\,(s,\,x,\,y)$

$$(b) \quad \mathrm{M}_s = -\mathrm{R}(x_1 - x) + p\int_s^l \sigma(\eta - y)\,d\sigma + q\int_s^l(\delta-\eta)\,(\xi - x)\,d\sigma.$$

Or on a

$$(c) \quad \begin{cases} (\xi - x) = \int_s^\sigma \frac{d\xi}{d\sigma}\,d\sigma = \int_s^\sigma \sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}\,d\sigma \; (x_1 - x) \\ \qquad = \int_s^l \sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}\,d\sigma. \end{cases}$$

En substituant (a), (b) et (c) dans l'équation (II), nous aurons :

$$
(d)\left\{\begin{aligned}
\mathrm{EI}\,\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}} &= \left(-q\delta l+q\int_0^l \eta d\sigma\right)\int_s^l\sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}\,d\sigma \\
&+p\int_s^l \sigma\eta d\sigma - py\int_s^l \sigma d\sigma \\
&+q\int_s^l\left[(\delta-\eta)\int_s^\sigma\sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}d\sigma\right]d\sigma.
\end{aligned}\right.
$$

Au moment où la flexion commence, c'est-à-dire où l'axe fléchi de la pièce se confond encore avec sa direction droite primitive y, q, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dq}{d\sigma}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$ et $\frac{d^2q}{d\sigma^2}$ s'annullent.

La valeur particulière de q qui satisfait à cette condition peut être obtenue en résolvant l'équation (d) par rapport à q, et en déterminant la vraie valeur de l'expression suivante :

$$
\lim\left\{\frac{\mathrm{EI}\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}+p\left(y\int_s^l\sigma d\sigma-\int_s^l\sigma\eta d\sigma\right]}{\left(-\delta l+\int_0^l\eta d\sigma\right)\int_s^l\sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}d\sigma+\int_s^l\left[(\delta-\eta)\int_\sigma^l\sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}d\sigma\right]d\sigma}\right\}_{y=\mathrm{const}=0}
$$

$$
\lim\left\{\frac{\mathrm{EI}\frac{d^2y}{ds^2}+p\left(y\int_s^l\sigma d\sigma-\int_s^l\sigma\eta d\sigma\right)}{\left(-\delta l+\int_0^l\eta d\sigma\right)(l-s)+\int_s^l(\delta-\eta)(\sigma-s)\,d\sigma}\right\}_{y=\mathrm{const}=0.}
$$

Il faudra d'abord intégrer l'équation différentielle

$$
(f)\quad \begin{aligned}
\mathrm{EI}\frac{d^2y}{ds^2} &= -q\delta l(l-s)+q(l-s)\int_0^l\eta d\sigma+q\int_s^l(\delta-\eta)(\sigma-s)\,d\sigma \\
&+p\int_s^l\sigma\eta d\sigma-py\int_s^l\sigma d\sigma \\
&=-\frac{1}{2}(q\delta+py)(l^2-s^2)+q(l-s)\int_0^l\eta d\sigma \\
&+qs\int_s^l\eta d\sigma+(p-q)\int_s^l\eta\sigma d\sigma.
\end{aligned}
$$

Par différentiations successives nous aurons :

$$(g)\qquad \mathrm{EI}\frac{d^3y}{ds^3}=q\delta s-\frac{1}{2}p(l^2-s^2)\frac{dy}{ds}-q\int_0^s \eta\, d\sigma,$$

$$(h)\qquad \mathrm{EI}\frac{d^4y}{ds^4}=q\delta-\frac{1}{2}p(l^2-s^2)\frac{d^2y}{ds^2}+ps\frac{dy}{ds}-qy,$$

$$(i)\qquad \mathrm{EI}\frac{d^5y}{ds^5}=-\frac{1}{2}p(l^2-s^2)\frac{d^3y}{ds^3}+2ps\frac{d^2y}{ds^2}+(p-q)\frac{dy}{ds}.$$

En substituant aux variables y et s les nouvelles variables z et u, liées aux premières par les relations

$$(l)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{s}{l}=u;\quad \frac{du}{ds}=\frac{1}{l};\quad \frac{dy}{ds}=z;\quad \frac{d^ny}{ds^n}=\frac{d^{n-1}z}{ds^{n-1}};\\ \frac{dz}{ds}=\frac{1}{l}\frac{dz}{du};\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{1}{l^2}\frac{d^2z}{du^2}\cdots\cdots\frac{d^mz}{ds^m}=\frac{1}{l^m}\frac{d^mz}{du^m}, \end{array}\right.$$

nous trouverons

$$\frac{\mathrm{EI}}{l^4}\frac{d^4z}{du^4}+\frac{1}{2}p(1-u^2)\frac{d^2z}{du^2}-2pu\frac{dz}{du}-(p-q)z=0.$$

En faisant

$$(m)\qquad \frac{pl^4}{2\,\mathrm{EI}}=a^2 \quad \text{et} \quad \frac{ql^4}{\mathrm{EI}}=b^2,$$

nous aurons définitivement

$$(n)\qquad \frac{d^4z}{du^4}+a^2(1-u^2)\frac{d^2z}{du^2}-4a^2u\frac{dz}{du}+(b^2-2a^2)z=0.$$

Nous avons intégré cette équation différentielle linéaire par les séries et nous avons obtenu l'intégrale générale suivante :

$$
(o)\left\{
\begin{aligned}
z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4,\\
z_1 &= 1 + A_2 u^4 + A_3 u^6 + \sum_{n=\infty}^{n=4} - \frac{a^2 u^{2n}}{(2n-3)(2n-2)(2n-1)2n}\\
&\quad \times \left\{A_{n-1}(2n-3)(2n-2) + A_{n-2}[c^2-(2n-3)(2n-2)]\right\},\\
z_2 &= u + B_2 u^5 + B_3 u^7 + \sum_{n=\infty}^{n=4} - \frac{a^2 u^{2n+1}}{(2n-2)(2n-1)2n(2n+1)}\\
&\quad \times \left\{B_{n-1}(2n-2)(2n-1) + B_{n-2}[c^2-(2n-2)(2n-1)]\right\},\\
z_3 &= u^2 + D_2 u^4 + \sum_{n=\infty}^{n=3} - \frac{a^2 u^{2n}}{(2n-3)(2n-2)(2n-1)2n}\\
&\quad \times \left\{D_{n-1}(2n-3)(2n-2) + D_{n-2}[c^2-(2n-3)(2n-2)]\right\},\\
z_4 &= u^3 + E_2 u^5 + \sum_{n=\infty}^{n=3} - \frac{a^2 u^{2n+1}}{(2n-2)(2n-1)2n(2n+1)}\\
&\quad \times \left\{E_{n-1}(2n-2)(2n-1) + E_{n-2}[c^2-(2n-2)(2n-1)]\right\},\\
A_2 &= -\frac{a^2}{1.2.3.4}(c^2-1.2); \qquad A_3 = -\frac{a^2}{3.4.5.6} A_2\, 3.4.\\
B_2 &= -\frac{a^2}{2.3.4.5}(c^2-2.3); \qquad B_3 = -\frac{a^2}{4.5.6.7} B_2\, 4.5.\\
D_2 &= -\frac{a^2}{1.2.3.4}\, 1.2; \qquad E_2 = -\frac{a^2}{2.3.4.5}\, 2.3.\\
c^2 &= \frac{b^2}{a^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour éliminer les constantes arbitraires, nous avons les conditions suivantes :

a)

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)_{s=0} = (z)_{u=0} = 0,$$

c'est-à-dire

$$C_1 (z_1)_{u=0} + C_2 (z_2)_{u=0} + C_3 (z_3)_{u=0} + C_4 (z_4)_{u=0} = 0.$$

Or, comme on a

$$(z_1)_{u=0} = 1; \quad (z_2)_{u=0} = (z_3)_{u=0} = (z_4)_{u=0} = 0,$$

on en déduit

$$C_1 = 0.$$

b) En vertu de l'équation (9), on a

$$\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_{s=0} = \frac{1}{l^2}\left(\frac{d^2z}{du^2}\right)_{u=0} = 0,$$

c'est-à-dire

$$C_2 (z_2'')_{u=0} + C_3 (z_3'')_{u=0} + C_4 (z_4'')_{u=0} = 0.$$

Or, comme

$$(z_3'')_{u=0} = 2; \quad (z_2'')_{u=0} = (z_4'')_{u=0} = 0,$$

nous aurons

$$C_3 = 0.$$

c) De l'équation (*f*), on tire

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_{s=l} = \frac{1}{l}\left(\frac{dz}{du}\right)_{u=1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(p) \qquad C_2 (z_2')_{u=1} + C_4 (z_4')_{u=1} = 0.$$

d) Enfin, l'équation (*h*) donne

$$\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_{s=l} = \frac{p}{EI}\, l \left(\frac{dy}{ds}\right)_{s=l},$$

d'où l'on déduit

$$\left(\frac{d^3z}{du^3}\right)_{u=1} = 2\, a^2 (z)_{u=1},$$

c'est-à-dire

$$(q) \qquad C_2 (z_2''')_{u=1} + C_4 (z_4''')_{u=1} = 2\, a^2 [C_2 (z_2)_{u=1} + C_4 (z_4)_{u=1}].$$

Les équations (*p*) et (*q*) peuvent être satisfaites de deux manières :

1° Quand

$$C_2 = C_4 = 0;$$

2° Quand

$$(r) \qquad [z_4' (z_2''' - 2a^2 z_2) - z_2' (z_4''' - 2a^2 z_4)]_{u=1} = 0.$$

La première condition nous démontre que l'axe de la pièce peut conserver sa direction droite primitive indépendamment des valeurs de a^2 et de b^2; la seconde nous donne la relation nécessaire entre ces coefficients, pour que la flexion de l'axe puisse commencer.

Dans la table qui suit, nous donnons les plus petites valeurs de b^2, qui, pour des valeurs données de a^2, annulent l'équation (r). Les calculs effectués par la méthode des approximations successives ont été difficiles et compliqués; pour chaque approximation, il a fallu calculer jusqu'à vingt-huit membres de chaque série principale et de sa dérivée.

Table des racines de l'équation (r).

$a^2 = \frac{p l_9^4}{32 E I}$	5.125	20	30	40	80	120
$b^2 = \frac{q l_9^4}{16 E I}$	0	22,8	56,3	162,8	954	2.536,8

On voit, que $b^2 = 0$, correspond à $a^2 = 5.125$, ce qui est bien conforme au résultat du 7e cas.

L'effort de compression dangereux au milieu de l'axe de la tige et la charge correspondante qu'il produit par unité de surface s'expriment par les équations :

$$(9) \qquad P_9 = \frac{4EI}{l_9^2} a^2,$$

$$(9_1) \qquad \beta_9 = 4Ea^2\left(\frac{r}{l_9}\right)^2.$$

Des équations (9_1) et (II), nous tirons la valeur suivante du coefficient de longueur :

$$(9_2) \qquad \mu_9 = \frac{\pi}{2a}.$$

Pour faciliter l'application, nous avons calculé le coefficient de longueur pour les différentes valeurs de b^2, et nous avons rangé les résultats dans la table suivante :

Table des valeurs du coefficient de longueur μ_9.

$b^2 = \frac{q\, l_9^4}{16\,EI}$	0	22,8	56,5	162,8	954	2.536,8
$\mu_9 = \frac{\pi}{2a}$	0,694	0,351	0,287	0,248	0.176	0,143

§ 9. — 10° *Cas.*

Considérons une pièce élastique *ao* (*fig.* 9), composée de deux tiges cylindriques *ab* et *bo*, à axe commun, primitivement droit *ao*, à section différentes et de différentes longueurs l', l'', — soumise à l'action des forces de compression P', P'' et $-(P' + P'')$, appliquées aux points *a*, *b* et *o* et dirigées parallèlement à l'axe primitif ; les deux premières vers l'extrémité *o* et la dernière en sens opposé. Les extrémités *a* et *o*, tout en pouvant pivoter dans le plan de la flexion, sont astreintes à rester sur la droite *ao*.

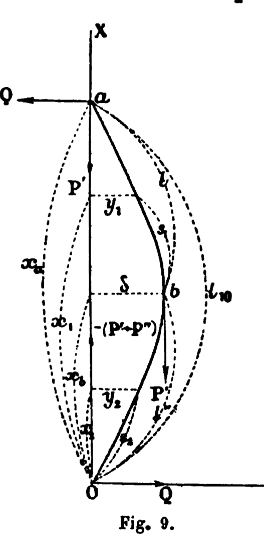


Fig. 9.

Il s'agit de trouver la valeur maxima des efforts de compression qu'une pareille pièce peut supporter sans fléchir. La flexion de l'axe la plus simple est celle qui s'effectue selon une courbe plane *a b o*, sans points d'inflexion. Mettons les axes de coordonnées rectangulaires, comme l'indique la *fig.* 10 et désignons par I_1 et I_2 les moments d'inertie des sections transversales

des deux tiges par rapport aux axes menés par les centres de gravité, perpendiculairement au plan de la flexion. Nous négligeons la contraction insensible de la longueur de l'axe.

Pendant la flexion, le point d'application b de la force P″ s'éloigne de la ligne ao à une distance δ, tandis que les points a et o ne peuvent pas la quitter.

Dans ces conditions, il devra se produire aux points a et o des réactions Q et $-Q_1$, perpendiculaires à ao et formant couple. Pour que l'équilibre soit conservé, il faut que l'on ait

$$(a)\quad Q = \frac{P''\delta}{X_2} = \frac{P''\delta}{\int_0^{l'} \frac{dx_1}{ds_1} ds_1 + \int_0^{l''} \frac{dx_2}{ds_2} ds_2} = \frac{P''\delta}{\int_0^{l'} \sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2} ds_1 + \int_0^{l''} \sqrt{1-\left(\frac{dy_2}{ds_2}\right)^2} ds_2}.$$

Faisant pour abréger

$$(b)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{P'}{EI_1} = a_1^2, \quad \frac{P'}{EI_2} = a_2^2; \quad \frac{P''}{EI_1} = b_1^2; \quad \frac{P''}{EI_2} = b_2^2; \\ \frac{P'+P''}{EI_2} = c^2, \end{array} \right.$$

nous aurons l'équation différentielle de l'axe fléchi de la tige ab :

$$(c)\quad \frac{\frac{d^2y_1}{ds_1^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2}} = -\frac{b_1^2\delta}{x_a}(x_a - x_1) - a_1^2 y_1$$

$$= -\frac{b_1^2\delta \int_0^{l'} \sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2} ds_1}{\int_0^{l'} \sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2} ds_1 + \int_0^{l''} \sqrt{1-\left(\frac{dy_2}{ds_2}\right)^2} ds_2} - a_1^2 y_1.$$

La relation nécessaire entre les coefficients a_1^2 et b_1^2

pour que la flexion puisse commencer, s'exprimera par

$$a_1^2)_1 = \lim \left\{ \frac{-\frac{d^2y_1}{ds_1^2}}{y_1\sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2}} - \frac{b_1^2\delta\int_s^{l'}\sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2}ds_0}{y_1\left[\int_0^{l'}\sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2}ds_1+\int_0^{l''}\sqrt{1-\left(\frac{dy_2}{ds_2}\right)^2}ds_2\right]} \right\}_{y_1=\mathrm{const}=0}$$

$$= \lim \left[\frac{\frac{d^2y_1}{ds_1^2}}{y_1} - \frac{b_1^2\delta}{y_0}\frac{(l'-s_1)}{l_{10}} \right]_{y_1=\mathrm{const}=0}.$$

Pour déterminer sa vraie valeur, il faut intégrer l'équation

$$(d) \qquad \frac{d^2y_1}{ds_1^2} = -a_1^2 y_1 - h_1^2\frac{\delta}{l_{10}}(l'-s_1).$$

L'intégrale générale sera

$$(f) \qquad -a_1^2y_1 - b_1^2\frac{\delta}{l_{10}}(l'-s_1) = C_1\sin a_1s_1 + C_2\cos a_1s_1.$$

Nous aurons de la même manière pour la tige *ob* l'équation différentielle

$$\frac{d^2y_2}{ds_2^2} = -a_1^2y_2 - h_2^2\frac{\delta}{l_{10}}(l_{10}-s_2) + b_2^2(\delta - y^2) = -c_2y_2 + b_2^2\frac{\delta}{l_{10}}s_2,$$

dont l'intégrale générale est

$$(g) \qquad h_2^2\frac{\delta}{l_{10}}s_2 - c^2y_2 = D_1\sin cs_2 + D_2\cos cs_2.$$

Pour éliminer les constantes arbitraires C_1, C_2, D_1 et D_2, et la quantité δ, nous avons les conditions suivantes :

1) pour $s_1 = l'$, $y_1 = 0$;
2) — $s_1 = 0$, $y_1 = \delta$;
3) — $s_2 = 0$, $y_2 = 0$;
4) — $s_2 = l''$, $y_2 = \delta$;
5) $\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)_{s_1=0} = \left(\frac{dy_2}{ds_2}\right)_{s_2=l''}$.

Des quatre premières, nous tirons :

$$C_2 = -C_1 \operatorname{tg} a_1 l',$$
$$C_1 = \frac{b_1^2 l' + a_1^2 l_{10}}{l_{10} \operatorname{tg} a_1 l'} \delta,$$
$$D_1 = \frac{b_2^2 l'' - c_2 l_{10}}{l_{10} \sin c l''} \delta = -\frac{b_2^2 l' + a_2^2 l_{10}}{l_{10} \sin c l''} \delta,$$
$$D_2 = 0;$$

après quoi la cinquième nous donne définitivement

$$(10') \qquad \frac{b_1^2}{a_1^2} - \frac{b_1^2 l' + a_1^2 l_{10}}{a \operatorname{tg} a_1 l'} = \frac{b_2^2}{c^2} + \frac{b_2^2 l' + a_2^2 l_{10}}{c \operatorname{tg} c l''}.$$

Étant posé

$$(h) \qquad \frac{P' + P''}{P'} = \beta, \quad \frac{I_2}{I_1} = \gamma \quad \text{et} \quad \frac{l''}{l'} = h,$$

nous pouvons trouver la plus petite racine positive cl'' de l'équation (10).

Or, d'après (*b*) et (*h*), on a

$$cl'' = \frac{h l_{10}}{h+1} \sqrt{\frac{P' + P''}{EI_2}},$$

d'où résultent la valeur de l'effort de compression dangereux agissant sur la tige bo, et la charge correspondante par unité de surface :

$$(10) \qquad P' + P'' = P_{10} = EI_2 \frac{(cl'')^2 (h+1)^2}{h^2 l_{10}^2},$$

$$(10_1) \qquad \beta_{10} = E \frac{(cl'')^2 (h+1)^2}{h^2} \left(\frac{r}{l_{10}}\right)^2,$$

et le coefficient de longueur est

$$(10_2) \qquad \mu_{10} = \frac{\pi h}{cl''(h+1)}.$$

Les semelles comprimées des poutres métalliques se trouvent souvent dans les conditions du cas considéré par rapport à la flexion dans le plan perpendiculaire à celui de la poutre ; à savoir, quand parmi trois nœuds

consécutifs, les deux extrêmes sont fixés aux autres parties de la construction, tandis que celui du milieu reste libre.

Ordinairement $h = 1$ et les coefficients β et γ varient, le premier entre 1 et 3 et le dernier entre 1 et 2. Pour faciliter l'application, nous avons calculé les coefficients de longueur d'après les équations (10') et (10_2) pour $h = 1$ et pour les différentes valeurs de β et γ, comprises entre les limites indiquées.

Ils sont rangés dans la table suivante, dont on pourra se servir à l'aide d'interpolations.

Table des coefficients de longueur μ_{10} pour $h = 1$.

	$\frac{P' + P''}{P''} = \beta =$					
	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	3,00
$\frac{I_2}{I_1} = \gamma =$ 1,00	1,00	0,95	0,91	0,89	0,87	0,82
1,25	1,06	1,005	0,97	0,94	0,915	»
1,50	1,12	1,06	1,02	0,99	0,96	»
1,75	1,18	1,11	1,07	1,04	1,005	»
2,00	1,24	1,16	1,12	1,08	1,05	»

§ 10. — 11e *Cas.*

Considérons une poutre à treillis sans montants verticaux (*fig.* 10), se composant de deux bandes parallèles et de deux systèmes de diagonales symétriquement inclinées par rapport à la verticale et s'entre-croisant chacune en ν points intermédiaires.

Supposons que toutes les diagonales du premier système $b_n a_{n+1}$, $b_{n-1} a_{n+3}$, ..., aient des sections égales ω, et soient comprimées par des efforts égaux P, tandis que

celles du second système, ayant des sections égales ω_1, soient tendues par des efforts égaux Q.

Admettons ensuite :

1° Qu'il existe des articulations parfaites à tous les points d'intersection et aux extrémités des diagonales;

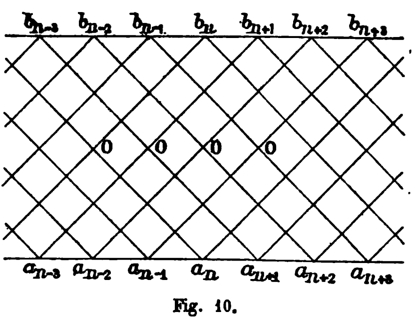


Fig. 10.

2° Que les contacts de leurs axes aux points d'intersection soient conservés pendant la déformation;

3° Qu'enfin les extrémités des axes soient astreintes à demeurer dans le plan primitif du treillis.

Il s'agit de déterminer la valeur minima P_n de l'effort de compression P, capable de produire la flexion des diagonales dans des plans normaux au treillis, occasionnant le flambement de ce dernier. Le flambement le plus simple et en même temps le plus facile à produire est celui dans lequel les axes de toutes les diagonales, tout en restant parallèles, fléchissent d'après les mêmes courbes planes et symétriques, sans points d'inflexion.

En négligeant l'allongement des diagonales tendues et la contraction des comprimées, nous trouvons que les ν points d'intersection et les deux extrémités de chaque axe courbé d'un système de diagonales, ainsi que les $\nu + 2$ points correspondants de chaque axe courbé de l'autre système, sont disposés d'une manière absolument identique par rapport aux axes droits primitifs.

Ces points seront soumis : sur l'axe d'une diagonale tendue aux pressions des diagonales comprimées; sur l'axe d'une diagonale comprimée, aux réactions des diagonales tendues respectivement égales et opposées aux premières.

Si, par conséquent, nous superposions l'axe courbé d'une diagonale comprimée et celui d'une diagonale tendue, nous pourrions les faire coïncider aux deux points extrêmes et aux ν points d'intersections intermédiaires.

Dans le cas considéré de petites déformations, tous les autres points correspondants des deux axes superposés ne pourraient être sensiblement éloignés les uns des autres. Nous pouvons donc admettre que ces deux axes coïncideront non seulement aux $\nu + 2$ points indiqués, mais sur toute leur longueur, et qu'en même temps, les actions et les réactions réciproques, au lieu d'être appliquées aux points d'intersections, seront réparties d'une manière continue sur toute la longueur des axes.

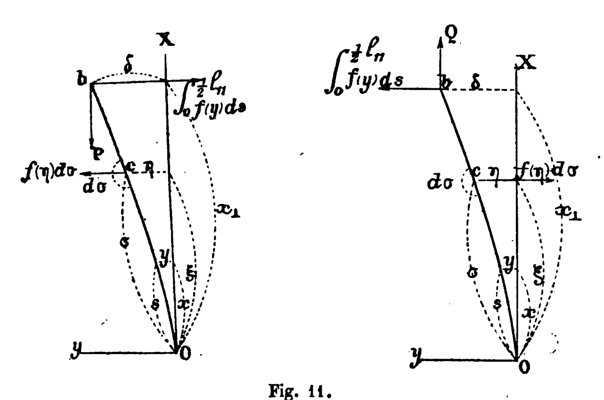


Fig. 11.

La première partie de la *fig.* 11 représente le demi-axe fléchi d'une diagonale comprimée, la seconde celui d'une diagonale tendue.

Prenons pour axes des x les directions primitives des axes des diagonales, et pour axes des y les perpendiculaires menées par les points O dans les plans de la flexion. La diagonale comprimée est soumise à l'action de l'effort P, appliqué à l'extrémité b et dirigé parallèlement à l'axe des x, à la réaction des diagonales tendues, parallèle aux ordonnées y, que nous avons admise comme répartie

à raison de $f(y)$ par unité de longueur, et à la réaction de la bande appliquée à l'extrémité b et égale à $\int_0^{\frac{1}{2}l_{11}} f(y)\,ds$. La diagonale tendue est soumise à l'effort Q appliqué à son extrémité b, parallèle aux abscisses, à la pression des diagonales comprimées $f(y)$ par unité de longueur et à la réaction de la bande égale à $\int_0^{\frac{1}{2}l_{11}} f(y)\,ds$. Les axes de ces deux diagonales doivent fléchir, suivant les mêmes courbes, dont les équations différentielles sont :

$$\frac{\mathrm{EI}}{\rho} = \mathrm{P}(\delta - y) - (x_1 - x)\int_0^{\frac{1}{2}l_{11}} f(y)\,ds + \int_s^{\frac{1}{2}l_{11}} (\xi - x) f(\eta)\,d\sigma,$$
$$\frac{\mathrm{EI}}{\rho} = -\mathrm{Q}(\delta - y) + (x_1 - x)\int_0^{\frac{1}{2}l_{11}} f(y)\,ds + \int_s^{\frac{1}{2}l_{11}} (\xi - x) f(\eta)\,d\sigma.$$

En ajoutant ces deux équations, nous trouvons

$$\mathrm{E}(\mathrm{I} + \mathrm{I}_1)\frac{1}{\rho} = (\mathrm{P} - \mathrm{Q})(\delta - y).$$

Cette équation est identique à celle d'Euler, et, par conséquent, nous pouvons en déduire que la flexion commence quand on a

$$\mathrm{P}_{11} - \mathrm{Q} = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{I} + \mathrm{I}_1)\pi^2}{l_{11}^2}.$$

L'effort dangereux et la charge par unité de surface correspondante seront :

$$(11) \qquad \mathrm{P}_{11} = \mathrm{EI}\pi^2 \left(\frac{1 + \frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}} + \frac{\mathrm{Q}l_{11}^2}{\mathrm{EI}\pi^2}}{l_{11}^2}\right),$$

$$(11_1) \qquad \beta_{11} = \mathrm{E}\pi^2\left(1 + \frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}} + \frac{\mathrm{Q}l_{11}^2}{\mathrm{EI}\pi^2}\right)\left(\frac{r}{l_{11}}\right)^2.$$

Nous pourrons, de la même façon, déduire les valeurs critiques P'_{11} et β'_{11} pour une même poutre à treillis, mais en supposant que les diagonales soient comprimées dans

les deux systèmes, c'est-à-dire que les efforts Q agissent dans une direction opposée à celle qu'ils avaient dans le cas précédent :

$$(11') \qquad P'_{11} = EI\pi^2\left(\frac{1 + \frac{I_1}{I} - \frac{Ql^2_{11}}{EI\pi^2}}{l^2_{11}}\right),$$

$$(11'_1) \qquad \beta'_{11} = E\pi^2\left(1 + \frac{I_1}{I} - \frac{Ql^2_{11}}{EI\pi^2}\right)\left(\frac{r}{l_{11}}\right)^2.$$

Il est évident que le coefficient de longueur s'exprimera dans les deux cas par la formule

$$(11_2) \qquad \mu_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{I_1}{I} \pm \frac{Ql^2_{11}}{EI\pi^2}}},$$

dans laquelle on adoptera les signes + ou —, selon que la force Q produira une tension ou une compression.

A l'aide de ces formules, on peut résoudre approximativement la question du flambement du treillis symétrique sans montants verticaux, à condition que, dans chaque système, toutes les diagonales, ayant les mêmes sections, soient soumises à des efforts égaux. Or, comme ces deux conditions ne sont réalisées que dans des cas exceptionnels, il semblerait que ces formules ne peuvent pas être appliquées d'une façon générale. Il est évident cependant que, si nous supposons les ν diagonales qui s'entre-croisent avec une diagonale comprimée, comme ayant des sections égales, et tendues par des efforts égaux à ceux de la plus faible d'entre elles, c'est-à-dire de celle qui opposerait la plus petite résistance à la flexion de la diagonale comprimée, nous admettons pour cette dernière des conditions plus défavorables qu'elles ne le sont en réalité.

Si, au contraire, nous substituons aux ν diagonales s'entre-croisant avec la diagonale considérée la plus forte d'entre elles, nous plaçons celle-là dans des condi-

tions plus favorables. Ainsi, quoique la théorie exposée ne puisse nous servir à déterminer exactement la compression maxima qu'une diagonale peut supporter sans fléchir, elle nous donne toutefois les limites entre lesquelles est comprise la valeur réelle de cette compression.

Dans l'application, on pourra toujours se contenter de la limite inférieure.

Les considérations précédentes ont pour base la supposition que les actions et les réactions réciproques des diagonales, au lieu de n'être appliquées qu'aux points d'intersection, sont réparties d'une manière continue sur toute leur longueur.

Comme cette supposition n'est pas conforme à la réalité, il est indispensable d'en déterminer l'influence sur la valeur du coefficient de longueur. Il est évident que, toutes les autres conditions étant égales, l'erreur sera d'autant plus grande qu'il y aura moins de points d'intersection et, par conséquent, sa plus grande valeur correspondra à $\nu = 1$.

Dans la note A placée à la fin de ce mémoire, nous déduisons des formules rigoureuses pour des poutres à treillis quelconques, à une et à deux intersections, et, en les comparant avec les formules approximatives exposées ci-dessus, nous prouvons que la différence entre les unes et les autres serait insignifiante, dans le cas, où

$$0 < I_1 < \frac{3}{2} I,$$

et

$$0 < Q < \frac{1}{2} P_{11},$$

P_{11} désignant l'effort dangereux déterminé d'après les formules (11) et (11').

C'est à ces limites qu'il faudrait borner l'extension de la formule (11_2).

Il est indispensable d'ajouter qu'on ne pourra appliquer la formule (11_2), qu'autant qu'elle donnera la valeur du coefficient de longueur $\mu > \frac{1}{\nu + 1}$, car, dans le cas contraire, l'axe de la diagonale considérée pourrait fléchir d'après une courbe ondulée, où la longueur de l'onde serait égale à la distance de deux points d'intersection voisins :

$$l = \frac{l_{11}}{\nu + 1},$$

par conséquent, le coefficient μ ne devra jamais être inférieur à $\frac{1}{\nu + 1}$.

Nous n'avons considéré ici que des treillis à diagonales à axes rectilignes, et soumises à des efforts bien centraux ; dans la note C, nous essayons d'apprécier l'influence de l'excentricité des efforts sur la résistance aux flambements.

§ 11. — 12ᵉ *Cas.*

Considérons un cas plus général, celui d'une poutre à treillis (*fig.* 12) dissymétrique, se composant de deux bandes parallèles, et de deux systèmes de barres inclinées différemment par rapport à la verticale et s'entre-croisant chacune en ν points intermédiaires.

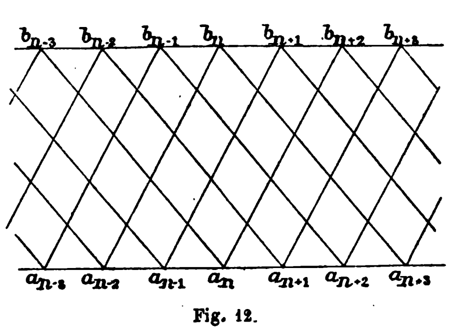


Fig. 12.

Supposons que toutes les barres du premier système présentant une même longueur l_{12} et la même section ω,

soient comprimées par des efforts égaux P, tandis que celles du second système, ayant des longueurs égales $l'_{12} = ml_{12}$ et des sections égales ω_1, soient tendues par des efforts égaux Q.

Admettons ensuite, comme dans le cas précédent:

1° Qu'il existe des articulations parfaites à tous les points d'intersection et aux extrémités des barres;

2° Que les contacts de leurs axes aux points d'intersection soient conservés pendant la déformation;

3° Enfin que les extrémités des axes soient astreintes à demeurer dans le plan primitif du treillis.

Il s'agit également de déterminer la valeur minima P_1, de l'effort de compression capable de produire la flexion des barres du premier système dans les plans normaux au treillis, et d'entraîner le flambement de ce dernier. Ici aussi le flambement le plus simple et qui se produira le plus facilement aura lieu quand les axes des barres de chaque système, tout en restant parallèles, fléchiront d'après les mêmes courbes planes et symétriques sans points d'inflexion.

En négligeant l'allongement des barres tendues et la contraction des barres comprimées, nous trouvons que l'axe fléchi d'une barre comprimée, ainsi que celui d'une barre tendue, ont leur ν points d'intersection et leurs extrémités à des distances respectivement égales du plan primitif du treillis. Ces points divisent les axes des barres en parties égales, dont la longueur est pour les barres comprimées $\frac{l_{12}}{\nu + 1}$, et pour les barres tendues $\frac{ml_{12}}{\nu + 1}$. Ces points seront soumis, sur l'axe de la barre tendue, aux pressions des barres comprimées, et sur l'axe de la barre comprimée aux réactions des barres tendues, réciproquement égales et opposées aux premières.

Dans le cas considéré de petites déformations, nous pouvons admettre que ces actions et réactions réciproques, au lieu d'être appliquées aux points d'intersection, seront réparties d'une manière continue sur toute la longueur des axes, et que non seulement les $\nu + 2$ points indiqués de chaque axe, mais aussi tous les autres points, situés sur les lignes parallèles aux bandes, seront disposés à des distances respectivement égales du plan primitif du treillis.

La première partie de la *fig.* 13 représente le demi-axe fléchi d'une barre comprimée; sur la seconde partie, on a figuré celui d'une barre tendue. Disposons les axes des coordonnées rectangulaires comme dans le cas précédent, et désignons respectivement par x, y, s et x_1, $y_1 = y$, $s_1 = ms$ les coordonnées et les longueurs des arcs des deux courbes considérées.

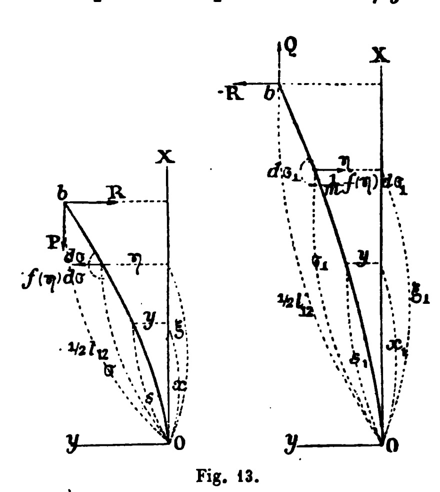


Fig. 13.

Le demi-axe d'une barre comprimée est soumis : 1° à l'action de l'effort P; 2° à la réaction des barres tendues, parallèle aux ordonnées y, et répartie à raison de $f(y)$ par unité de longueur, et à la réaction R de la bande appliquée à l'extrémité b et ayant pour expression

$$R = \int_0^{\frac{1}{2} l_{12}} f(y) ds.$$

De même, le demi-axe de la barre tendue est soumis à l'effort Q, à la pression des barres comprimées, répartie

à raison de $-\frac{1}{m}f(y_1)$ par unité de longueur, et à la réaction R de la bande, appliquée à l'extrémité b et s'exprimant par

$$-\mathrm{R} = -\frac{1}{m}\int_0^{\frac{1}{2}l_{12}} f(y_1)\,ds_1.$$

Les équations différentielles des deux axes fléchis seront :

$$\mathrm{EI}\left[\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}\right] = \mathrm{P}(\delta - y) - \mathrm{R}\int_s^{\frac{l_{12}}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds$$

$$+\int_s^{\frac{l_{12}}{2}} f(\eta)\left[\int_s^{\sigma}\sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}\,d\sigma\right]d\sigma,$$

$$\mathrm{EI}_1\left[\frac{\frac{d^2y_1}{d\sigma_1^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2}}\right] = -\mathrm{Q}(\delta - y) + \mathrm{R}\int_{s_1}^{\frac{l'_{12}}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2}\,ds_1$$

$$-\frac{1}{m}\int_{s_1}^{\frac{l'_{12}}{2}} f(\eta_1)\left[\int_{s_1}^{\sigma_1}\sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{d\sigma_1}\right)^2}\,d\sigma_1\right]d\sigma_1.$$

Il est évident, comme il ne s'agit que de déterminer la valeur minima de l'effort qui peut produire la flexion, que nous pourrons négliger devant l'unité les carrés des fonctions

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,\quad \left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2,\quad \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2,\quad \left(\frac{d\eta_1}{d\sigma_2}\right)^2,$$

et arriver ainsi aux équations

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{ds^2} = \mathrm{P}(\delta - y) - \mathrm{R}\left(\frac{l_{12}}{2} - s\right) + \int_s^{\frac{l_{12}}{2}} f(\eta)(\sigma - s)\,d\sigma,$$

$$\mathrm{EI}_1\frac{d^2y_1}{ds_1^2} = -\mathrm{Q}(\delta - y) + \mathrm{R}\left(\frac{l'_{12}}{2} - s_1\right) - \frac{1}{m}\int_{s_1}^{\frac{l'_{12}}{1}} f(\eta_1)(\sigma_1 - s_1)\,d\sigma_1.$$

Mais

$$s_1 = ms \quad \text{et} \quad \sigma_1 = m\sigma,$$

d'où résulte

$$\frac{dy_1}{ds_1} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{m}\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d^2y_1}{ds_1^2} = \frac{1}{m^2}\frac{d^2y}{ds^2},$$

$$\frac{1}{m}\int_{s_1}^{\frac{1}{2}l'_{12}} f(\eta_1)(\sigma_1 - s_1)\,d\sigma_1 = m\int_{s}^{\frac{1}{2}l_{12}} f(\eta)(\sigma - s)\,d\sigma.$$

Par conséquent

$$\text{EI}\frac{d^2y}{ds^2} = \text{P}(\delta - y) - \text{R}\left(\frac{l_{12}}{2} - s\right) + \int_{s}^{\frac{1}{2}l_{12}} f(\eta)(\eta - s)\,d\sigma.$$

$$\frac{1}{m^2}\text{EI}_1\frac{d^2y}{ds^2} = -\text{Q}(\delta - y) + m\text{R}\left(\frac{l_{12}}{2} - s\right)$$
$$- m\int_{s}^{\frac{1}{2}l_{12}} f(\eta)(\sigma - s)\,d\sigma.$$

En ajoutant ces deux équations, après avoir multiplié la première par m, nous trouverons

$$\text{EI}\frac{d^2y}{ds^2}\left(m + \frac{\text{I}_1}{m^2\text{I}}\right) = (\delta - y)(m\text{P} - \text{Q}).$$

Il en résulte que la flexion commence quand on a

$$m\text{P}_{12} - \text{Q} = \frac{\text{EI}\left(m + \frac{\text{I}_1}{m^2\text{I}}\right)}{l_{12}^2}\pi^2.$$

L'effort dangereux et la charge seront :

$$(12) \qquad \text{P}_{12} = \text{EI}\pi^2\left(\frac{1 + \frac{\text{I}_1}{m^2\text{I}} + \frac{\text{Q}l_{12}^2}{m\text{EI}\pi^2}}{l_{12}^2}\right),$$

$$(12_1) \qquad \beta_{12} = \text{E}\pi^2\left(1 + \frac{\text{I}_1}{m^2\text{I}} + \frac{\text{Q}l_{12}^2}{m\text{EI}\pi^2}\right)\left(\frac{r}{l_{12}}\right)^2.$$

Si les efforts Q agissaient dans une direction opposée à celle qu'ils avaient dans le cas considéré, nous trouverions

aisément :

$$(12') \qquad P'_{12} = EI\pi^2\left(\frac{1 + \frac{I_1}{m^3 I} - \frac{Q l^2_{12}}{EI\pi^2 m}}{l^2_{12}}\right),$$

$$(12'_1) \qquad \beta'_{12} = E\pi\left(1 + \frac{I_1}{m^3 I} - \frac{Q l^2_{12}}{EI\pi^2 m}\right)\left(\frac{r}{l_{12}}\right)^2.$$

Le coefficient de longueur s'exprimera dans les deux cas par la formule

$$(12_2) \qquad \mu_{12} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{I_1}{m^3 I} \pm \frac{Q l^2_{12}}{mEI\pi^2}}},$$

dans laquelle on adoptera les signes + ou — selon que la force Q produira une tension ou une compression.

Dans l'application il faudra substituer aux valeurs I_1 et Q, les valeurs relatives à celle des barres s'entre-croisant avec la barre considérée qui opposera la moindre résistance au flambement du treillis, c'est-à-dire à celle qui donnera la plus grande valeur pour μ_{12}.

Il est évident que, pour les mêmes raisons qu'au cas précédent, il faut que $\mu_{12} > \frac{1}{\nu + 1}$.

Nous considérons comme indispensable de remarquer que la formule (12_2) n'est applicable qu'autant que $0{,}5 < m < 2$. Hors de ces limites, les formules approximatives donnent des résultats sensiblement différents de ceux des formules exactes exposées dans la note A.

CHAPITRE II.

EXPÉRIENCES (*).

§ 12. — *Expériences antérieures.*

En passant au chapitre des expériences, il faut d'abord remarquer que, si la plupart des renseignements obtenus par cette voie avant l'année 1880 furent, il est vrai, d'une certaine utilité pratique, ils n'ont eu guère d'importance pour la science, par défaut de précision. L'impossibilité de définir l'excentricité de l'effort de compression, la figure primitive de l'axe de la pièce et les conditions dans lesquelles se trouvaient ses extrémités, privait ces expériences de toute valeur scientifique, et ne permettait pas de s'en servir pour vérifier la théorie.

Nous ne nous arrêterons pas ici aux expériences trop connues de Hodgkinson avec le fer et la fonte, lesquelles jusqu'à ces derniers temps, avaient servi de base à tant de formules empiriques; nous remarquerons seulement que celles des expériences qui concernaient la flexion produite par les efforts de compression supérieurs à la limite d'élasticité de la matière des pièces essayées, ont mené à tort certains ingénieurs à considérer la théorie d'Euler comme fausse en général. Il a été indiqué au chapitre précédent que la formule suppose des corps parfaitement élastiques; elle ne saurait donc être appliquée aux pièces réelles que dans le cas où la charge

(*) Nous n'examinerons ici que les expériences faites avec le fer et l'acier doux, en laissant de côté la question de la résistance au flambement des autres matériaux, qui jusqu'à présent n'est pas encore suffisamment éclaircie.

Notons aussi que dernièrement M. Tetmayer a fait de très importantes expériences avec des pièces de bois au laboratoire de l'École polytechnique de Zürich.

dangereuse ne dépasse pas la limite d'élasticité. Cette dernière condition n'est satisfaite que pour des pièces dont la longueur est considérable par rapport à leurs dimensions latérales. Dans le cas contraire, les pièces commencent à fléchir sous des charges qui altèrent le module d'élasticité et, par conséquent, ne se prêtent pas à l'application de la formule d'Euler.

D'autre part, le désaccord entre les expériences de Hodgkinson et la formule d'Euler, même dans le cas où la charge dangereuse calculée d'après cette formule serait inférieure à la limite d'élasticité, s'explique par ce fait, que les extrémités des pièces dont se servait Hodgkinson étaient plates ou arrondies, et ne pouvaient pas tourner librement pendant la déformation, comme le suppose la théorie.

Or, il faut remarquer, qu'en général, les expériences concernant la flexion des pièces à extrémités plates, ne sauraient avoir de sérieuse importance au point de vue scientifique, étant donné que les conditions dans lesquelles se trouvaient les pièces par rapport à la manière d'application des forces de compression, ne sont les mêmes qu'en apparence.

En effet, quelle que soit la précision de l'ajustage des extrémités plates de la pièce sur les plaques de la presse, la répartition de l'effort sur leur surface de contact cesse d'être uniforme à la moindre flexion de l'axe qui se produit dès le commencement même de la compression. Le point d'application de la résultante des efforts se déplace vers le côté convexe de la pièce, et il se produit une excentricité plus ou moins considérable, qui dépend de la forme de la section transversale et qui varie en même temps que la flèche. Les pièces à extrémités arrondies étaient également dans des conditions impossibles à définir, et qui varient avec la dureté des matériaux et le rayon des bases.

M. Considère, dans son mémoire sur la *Résistance des pièces comprimées*, présenté au Congrès international des procédés de construction en 1889, remarque que le côté faible des expériences de Hodgkinson, Marshall, etc., résultait de ce qu'ils se servaient de pièces à bases plates ou arrondies (*). C'est à l'excentricité qui devait toujours se produire dans de semblables conditions, que M. Considère attribue l'impossibilité de faire concorder ces expériences avec la théorie qui conduit à admettre la rupture de la pièce sous une charge très voisine de celle qui produit la première flèche.

Pour se donner une idée claire de la diversité des données obtenues des expériences faites sur des pièces à bases plates, nous avons représenté dans la *fig.* 1, Planche page 364bis, les résultats des expériences faites dernièrement en Amérique, ainsi que les résultats trouvés par MM. Baushinger et Tetmayer, en Europe. On a porté comme abscisses les rapports $\frac{l}{r}$, et comme ordonnées les valeurs correspondantes des charges dangereuses, exprimées en tonnes par centimètre carré de surface transversale. Il suffit d'un coup d'œil sur la *fig.* 1 pour se convaincre de l'impossibilité d'exprimer par une loi empirique quelconque des données si diverses.

La *fig.* 1 nous montre en même temps l'erreur que l'on commettrait en voulant attribuer une valeur aux formules empiriques, fondées sur quelques expériences faites avec des pièces à extrémités plates. Pour n'en donner qu'un seul exemple, nous avons désigné sur cette figure par le signe ⊙ les résultats des expériences faites en Amérique par M. Strobel pour déterminer la résistance au flambement des pièces rivées en fer ⅂L,

(*) Les pièces expérimentées par M. Marshall avaient 1 pouce carré de section et étaient articulées au moyen de broches de 1 pouce $^{1}/_{8}$ de diamètre (*Bulletin des ingénieurs civils américains*, 1887, Août).

comme l'indique la figure. Ces pièces ont été employées dans la construction du pont du chemin de fer Chicago-Milwaukee-Saint-Paul, sur le Mississipi. M. Strobel a employé pour ses expériences quinze modèles différents à sections semblables à celles des pièces de la construction, mais ayant des dimensions moindres. Se fondant sur les résultats obtenus par ses expériences, il a exprimé la charge dangereuse par unité de surface au moyen des deux formules suivantes :

a) pour $\frac{l}{r} < 90$, $\beta = 2{,}46$ tonnes par centimètre carré;

b) pour $\frac{l}{r} \begin{matrix} > 90, \\ < 164, \end{matrix}$ $\beta = 3{,}23 - 0{,}0088 \frac{l}{r}$ tonnes par centim. carr.

Ces formules, représentées graphiquement sur la *fig.* 1 par deux droites ABC, se rapprochent suffisamment des résultats des expériences de M. Strobel et s'éloignent considérablement de ceux des autres expérimentateurs. Il paraît que l'excentricité de l'effort, qui se produit toujours dans les pièces à bases plates, dépend non seulement du rapport $\frac{l}{r}$, mais aussi de la figure et des dimensions des sections transversales.

Mais, si les expériences faites avec des pièces à bases plates ne peuvent nous fournir aucune indication sur la relation qui existe entre l'effort dangereux et les dimensions de la pièce, sur quoi peut-on se guider alors dans les calculs des pièces comprimées dans une construction, dont les extrémités se trouvent ordinairement dans des conditions presque impossibles à définir? Nous reviendrons sur cette question dans le chapitre suivant; en attendant, nous passerons aux récentes expériences des éminents ingénieurs MM. Bauschinger, Tetmayer et Considère, concernant la résistance des pièces comprimées en fer et en acier doux, à bases réalisant autant que possible les conditions des extrémités libres.

§ 13. — *Expériences du professeur Bauschinger.*

M. le professeur Bauschinger fit en 1886, au laboratoire de Munich, une série d'expériences, concernant la flexion des barres en fer forgé à section simple T, double I. U, et celle des cornières. Il en a publié les résultats dans *Mittheilungen aus dem Mechanisch-Technischem Laboratorium der K. Technischen Hochschule in München.*, 15 Heft, 1877.

Le cadre restreint de notre mémoire ne nous permet pas de communiquer en détail tous les résultats de ces intéressantes expériences, que l'on pourra trouver dans l'ouvrage indiqué. Notons seulement que M. Bauschinger a réuni dans son compte rendu, les résultats obtenus pour quarante-deux barres, dont vingt-neuf ont été munies à leurs extrémités de bouts coniques en acier, fortement assujettis à la barre, et pouvant pivoter librement dans des coussinets creux en acier, fixés aux plaques de la presse. En faisant coïncider exactement les axes des bouts coniques avec ceux des barres à essayer, M. Bauschinger amenait ces derniers à un état très proche des conditions théoriques du cas principal. Les treize autres barres avaient des bases plates, perpendiculaires à leurs axes, et bien assujetties aux plaques de la presse. Il a déterminé pour chaque pièce à essayer le module et la limite de l'élasticité, ainsi que la résistance à l'écrasement par simple compression.

Voici les principales conclusions de ces expériences :

1° Au commencement même de l'essai, dès que l'effort de compression atteint une valeur sensible, il se produit une flexion élastique, qui augmente en même temps que cet effort. M. Bauschinger en attribue la cause à l'homogénéité incomplète de la matière dont se compose la pièce, et à l'impossibilité d'atteindre la forme absolument rec-

tiligne de son axe, ainsi qu'à l'impossibilité d'éviter entièrement l'excentricité de l'effort de compression. Mais, en général, cette flexion est peu sensible, sa direction est fortuite et ne coïncide pas toujours avec le plan perpendiculaire à l'axe correspondant au plus petit moment d'inertie de la section transversale ;

2° Quand l'effort atteint une certaine limite, il se produit immédiatement une flexion considérable dans le plan indiqué. Quoique la pièce ne s'effondre pas immédiatement, la flèche croît rapidement dès la moindre augmentation de l'effort et la pièce perd ainsi toute sa stabilité. M. Bauschinger appelle cette limite *l'effort d'effondrement ;*

3° Les expériences faites avec des barres munies des bouts coniques ont prouvé que la formule d'Euler ne peut servir à déterminer l'effort d'effondrement, qu'autant que la charge par unité de surface ne dépasse pas une certaine limite, *probablement celle d'élasticité.*

En dehors de cette condition, l'effort réel d'effondrement est inférieur à celui que donne la théorie d'Euler;

4° La formule bien connue de Rankine (Schwartz)

$$\beta = \frac{T}{1 + \alpha\left(\frac{l}{r}\right)^2},$$

où l'on admet le coefficient α du fer forgé comme constant et égal à 0,00009 (*), ne nous donne pas des résultats qui s'accordent avec les expériences ;

5° M. Bauschinger trouve, en général, que, quand il s'agit de barres à extrémités pointues et quand la limite d'élasticité n'est point dépassée, les valeurs de l'effort d'effondrement obtenues directement par les expériences s'accordent mieux avec la formule d'Euler qu'avec les formules empiriques.

(*) En Russie, on admet $\alpha = 0{,}00008$.

Nous avons réuni dans les deux tables qui suivent, les résultats principaux des expériences de M. Bauschinger, à savoir les rapports $\frac{l}{r}$ et les valeurs correspondantes de la charge d'effondrement β, exprimées en tonnes par centimètre carré. Ces valeurs numériques sont portées sur les *fig.* 1 et 2.

Table des résultats des expériences faites par le professeur Bauschinger sur des barres en fer forgé à bouts coniques.

$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β
49,53	2,564	105,59	1,662	134,7	1,105	216,87	0,36	230,07	0,47
57,24	3,475	107,17	2,063	155,94	0,95	218	0,378	239,78	0,465
59,14	3,035	115	1,036	162,34	0,963	218	0,378	246,9	0,271
65,48 (*)	1,374	121,25	1,816	169	0,517	218	0,379	315,9	0,194
67,44	1,87	126,91	0,95	175,18	0,824	218	0,389	369,05	0,111
76,48	2,442	133,7	0,90	191,8	0,564	218	0,379	»	»

(*) M. Bauschinger remarque que cette expérience n'a pas réussi.

Table des résultats des expériences faites par le professeur Bauschinger sur des barres en fer forgé à extrémités libres.

$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β
34,15	3,301	79,1	2,697	115,7	2,355	165,4	1,522	230,4	1,416
57,5	2,957	84,37	2,632	112,5	2,140	166,7	1,825	241,3	0,655
67,4	2,836	107,86	2,263	117,35	2,436	»	»	»	»

Le côté faible des recherches de M. Bauschinger consiste principalement dans le nombre peu considérable de ces expériences qui, vu les diverses sortes de fer dont il se servait, donnèrent des résultats très variés.

§ 14. — *Expériences du professeur Tetmayer.*

Dans les *Mittheilungen der Anstalt zur Prüfung der Baumaterialen am eigen. Polytechnicum in Zurich*, 1890,

le professeur Tetmayer (*) a publié, entre autres, le compte rendu de nombreuses expériences faites sur la résistance des pièces comprimées en fer soudé de deux qualités différentes et en fer fondu à profils laminés ou rivés. La plupart des barres soumises à ces expériences avaient leurs extrémités munies de bouts coniques et se rapprochaient, par conséquent, des conditions théoriques des barres à extrémités libres.

Sans nous arrêter aux détails de ces expériences, effectuées d'une manière très précise, et qu'on pourra trouver dans l'ouvrage indiqué, nous ne nous occuperons ici que des résultats suivants, comme ayant un rapport direct avec notre mémoire :

1° Quand le rapport $\frac{l}{r}$ dépasse

a) pour le fer fondu, $\frac{l}{r} > 105$;

b) — soudé, $\frac{l}{r} > 112,5$;

l'effort d'effondrement suit la loi d'Euler et, par conséquent, la formule (2) donne, dans les limites indiquées, des résultats très approchés de ceux des expériences;

2° Pour $\frac{l}{r}$ compris entre les limites

a) pour le fer fondu, $20,4 < \frac{l}{r} < 105$;

b) — soudé, $18,5 < \frac{l}{r} < 112,5$;

la loi d'Euler n'est plus applicable. L'effort dangereux, dans les limites indiquées, peut être exprimé avec une exactitude suffisante pour l'application par cette simple formule empirique

$$\beta_1 = a - b\left(\frac{l}{r}\right).$$

(*) L'édition française de cet ouvrage important a paru dernièrement.

M. Tetmayer a calculé pour les coefficients numériques a et b les valeurs suivantes, exprimées en tonnes par centimètre carré :

$$a) \text{ pour le fer fondu, } \begin{cases} a = 3{,}207, \\ b = 0{,}01157; \end{cases}$$
$$b) \quad — \quad \text{soudé, } \begin{cases} a = 3{,}03, \\ b = 0{,}013. \end{cases}$$

Au-dessous des limites indiquées pour $\frac{l}{r}$, cette formule empirique n'est plus applicable, ce qui, du reste, n'a pas d'importance sérieuse dans l'application ;

3° Il est impossible d'exprimer l'effort dangereux en fonction de $\frac{l}{r}$ par une seule formule empirique générale, applicable aussi bien au-dessus qu'au-dessous de la limite d'élasticité; aussi la formule généralement usitée de Rankine (Schwartz) à coefficient constant pour toutes valeurs $\frac{l}{r}$ n'est pas d'accord avec les expériences. Cette formule ne devrait être appliquée qu'en dehors des limites d'élasticité, c'est-à-dire en dehors des limites où la formule d'Euler peut s'appliquer; et, même dans ce cas, le coefficient α est une quantité variable et fonction de $\frac{l}{r}$;

4° M. Tetmayer trouve que la résistance des pièces rivées en fer soudé n'est pas inférieure à celle des pièces laminées, mais à condition

a) que la distance entre les rivets ne dépasse pas 55 centimètres;
b) que les rivets remplissent complètement les trous;
c) que l'affaiblisement de la section par la rivure ne dépasse pas 12 p. 100.

Le fer fondu est moins avantageux que le fer forgé quant à cette dernière condition; c'est pourquoi M. Tetmayer conseille de ne pas négliger l'affaiblissement de

la section, dès qu'il surpasse 10 p. 100 de la surface entière.

Dans les tables ci-dessous, nous avons réuni les valeurs $\frac{l}{r}$ et celles de la charge dangereuse correspondante, obtenues par les essais de M. Tetmayer; nous avons porté ces données numériques respectivement sur les *fig.* 1, 2 et 3, Planche page 364[bis].

I. — Table des expériences faites par M. Tetmayer sur des barres en fer soudé de Wendel à bouts coniques.

$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β
31,6	2,54	71,2	1,98	95,3	1,86	135,0	1,17	191,8	0,51
35,4	2,37	71,9	2,14	96,7	1,81	135,0	1,09	198,0	0,54
39,6	2,33	74,5	2,30	96,7	1,74	141,9	0,93	210,0	0,49
45,0	2,39	75,7	2,16	98,2	1,77	151,0	0,84	210,0	0,44
50,0	2,26	76,3	1,92	101,0	1,80	153,0	0,97	212,0	0,51
50,0	2,34	76,3	1,81	107,0	1,71	157,0	0,81	214,0	0,46
50,6	2,36	83,6	2,08	111,0	1,48	161,0	0,71	214,0	0,40
50,6	2,25	84,2	2,10	111,7	1,65	162,0	0,73	216,0	0,45
53,3	2,33	87,0	1,92	115,0	1,26	163,0	0,70	218,0	0,44
60,2	2,41	90,0	2,22	118,5	1,35	170,0	0,75	218,0	0,43
62,1	2,27	90,0	2,01	120,7	1,37	170,0	0,67	245,0	0,33
68,0	2,25	90,0	1,94	130,0	1,21	172,0	0,69	262,0	0,30
70,0	2,35	90,1	1,75	131,0	1,05	172,0	0,61	288,0	0,25
70,0	2,11	90,1	1,53	131,0	0,91	177,0	0,67	355,0	0,15
71,2	2,27	94,7	1,77	»	»	»	»	»	»

II. — Table des expériences faites par M. Tetmayer sur des barres en fer soudé « Burbach » à bouts coniques.

$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β
49,6	2,56	72,2	2,21	111,5	1,49	154,8	0,78	208,5	0,43
50,0	2,51	80,3	2,13	113,0	1,40	166,8	0,69	209,3	0,44
51,7	2,37	81,7	2,12	114,6	1,64	168,6	0,66	210,6	0,43
52,5	2,25	84,4	1,74	126,8	1,04	168,8	0,67	215,1	0,42
58,2	2,47	85,3	1,81	128,3	1,25	170,3	0,67	218,8	0,40
59,2	2,01	88,2	1,90	128,5	1,05	177,8	0,59	221,2	0,40
59,8	2,51	89,2	1,58	129,8	1,10	177,9	0,55	238,2	0,39
60,0	2,10	90,3	2,00	141,8	1,01	181,7	0,55	251,2	0,33
63,6	2,15	91,5	1,80	144,9	0,79	192,5	0,57	371,0	0,28
69,2	2,14	92,4	1,68	146,9	0,84	203,0	0,54	322,0	0,20
70,1	2,23	100,8	1,90	150,3	0,86	206,8	0,44	341,0	0,15
71,5	2,14	108,8	1,56	»	»	»	»	»	»

III. — Table des expériences faites par M. Tetmayer avec des barres en fer soudé à bases plates.

$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β
14,6	2,89	20,3	2,96	20,8	2,72	28,1	2,85
16,3	2,75	20,3	2,79	21,9	2,67	»	»

IV. — Table des expériences faites par M. Tetmayer avec des barres en fer fondu à bouts coniques.

$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β	$\frac{l}{r}$	β
31,6	2,74	72,1	2,33	94,7	1,98	132,0	1,01	191,8	0,55
35,4	2,70	72,1	2,03	94,7	1,96	132,0	1,16	199,0	0,56
39,6	2,70	73,7	2,33	94,7	1,84	134,0	1,22	210,0	0,53
45,9	2,87	74,8	2,08	98,2	1,98	141,9	1,03	210,0	0,48
50,0	2,68	74,8	2,96	101,0	1,77	152,8	0,97	211,0	0,56
50,0	2,42	75,7	2,33	108,0	1,81	153,0	1,09	212,0	0,53
51,2	2,70	84,1	2,29	111,0	4,72	157,0	0,92	216,0	0,44
51,2	2,25	84,2	2,19	111,7	1,88	161,0	0,83	216,0	0,47
53,3	2,57	87,0	2,25	115,0	1,41	163,0	0,80	216,0	0,38
60,6	2,48	90,0	2,39	118,5	1,48	170,0	0,76	218,0	0,43
62,1	2,64	90,0	2,10	120,7	1,57	170,0	0,68	246,0	0,38
68,0	2,67	90,0	1,90	129,0	1,36	172,0	0,75	262,0	0,33
70,0	2,28	92,2	1,81	129,0	1,22	175,0	0,76	288,0	0,29
70,0	2,06	92,2	1,58	130,0	1,27	175,0	0,69	355,0	0,22
71,9	2,21	94,3	2,15	132,0	1,28	175,0	0,60	»	»

Notons enfin que :

a. Pour le fer soudé, la résistance moyenne à la rupture par extension était

pour le fer de Wendel, de 3,683 tonnes par centimètre carré,
— de Burbach de 3,57 — — ;

la limite moyenne d'élasticité était 1.634 tonnes par centimètre carré ;

b. Pour le fer fondu, la résistance moyenne à la rupture était $4^t,28$ par centimètre carré; la limite d'élasticité $2^t,15$, le module d'élasticité 2.156 tonnes par centimètre carré.

§ 15. — *Expériences de M. Considère.*

Le compte rendu du Congrès international des procédés de construction, tenu à Paris en 1889, contenait un mémoire très intéressant de M. Considère sur la *Résistance des pièces comprimées*. L'auteur y communique les résultats obtenus par ses expériences très précises sur la résistance au flambement des barres en fer soudé et en acier de différentes qualités.

L'application des efforts de compression au centre des pièces et l'articulation sans frottement sensible de leurs extrémités s'obtenaient à l'aide de procédés très précis, dont on pourra trouver la description dans le mémoire en question. Pour être courts, nous passerons à l'exposé des conclusions qui en ont été tirées par M. Considère :

1° La valeur de l'effort, qui produit l'effondrement des pièces comprimées en fer fondu et en acier, n'est que de très peu supérieure à celle qui produit la première flexion perceptible de l'axe. M. Considère explique ce résultat, qui est en contradiction directe avec les conclusions de Hodgkinson et Marshall et autres, par cette circonstance que ces derniers se servaient pour leurs expériences de barres à extrémités plates ou arrondies se trouvant ainsi dans un état impossible à définir. De même, il explique la flexion élastique des barres comprimées, observées par M. Bauschinger pour de faibles valeurs de la charge, par le manque de coïncidence au centre des forces de compression et par l'imperfection de l'articulation des extrémités, deux facteurs que M. Considère dit avoir éliminé d'une manière complète dans ses propres expériences ;

2° M. Considère, partant du fait que le module d'élasticité E ne peut être admis comme constant que pour

les charges inférieures à la limite *absolue* d'élasticité, émet l'opinion que la formule d'Euler ne peut être appliquée, dans le sens rigoureux, qu'au cas où l'effort dangereux auquel elle conduit n'atteint pas la limite absolue d'élasticité qui correspond à peu près à $\frac{l}{r} = 140$ pour le fer, et pour l'acier à $\frac{l}{r} =$ de 105 à 135, selon la dureté. Aussi, tant que $\frac{l}{r}$ est plus grand que ces limites, il y a accord parfait entre l'expérience et la formule d'Euler. Mais, dès que l'on sort de ces limites, la résistance réelle au flambement tombe au-dessous du chiffre calculé par cette formule et l'écart va en augmentant lentement d'abord, puis très rapidement, lorsque la charge dangereuse dépasse la limite pratique d'élasticité, variant pour le fer entre 20 et 22 kilogrammes;

3° Constatant ainsi l'accord presque complet entre la formule d'Euler et l'expérience pour les charges dangereuses, inférieures à la limite d'élasticité absolue, M. Considère tâche de démontrer qu'au-dessus de cette limite, la charge dangereuse devra s'exprimer par une formule

$$\beta = f\left(\frac{l}{r}\right),$$

et que $\frac{l}{r}$ est bien la seule variable dont dépend la résistance au flambement pour un métal déterminé;

4° Le recuit a diminué la résistance au flambement des fers et surtout celle des aciers, tandis que l'écrouissage l'a augmenté. M. Considère en dégage la conséquence pratique que l'on doit éviter, autant que possible, de recuire les barres d'acier destinées au travail de la compression;

5° L'acier présente une supériorité absolue sur le fer

quant à la résistance à la compression, mais la différence des deux métaux à ce point de vue est bien moindre que ne le ferait prévoir la comparaison de leur résistance à la traction. L'infériorité relative de l'acier augmente avec le rapport $\frac{l}{r}$ à mesure que l'on se rapproche davantage des limites où la formule d'Euler est applicable et où, par suite, l'acier, si dur qu'il soit, ne l'emporte pas sur le fer de 10 p. 100.

Dans la table ci-contre, nous exposons les rapports $\frac{l}{r}$ et les charges dangereuses par unité de surface, obtenus par les expériences de M. Considère.

Table des résultats des expériences de M. Considère sur la résistance des pièces comprimées.

NATURE DU MÉTAL			FORME de la section	SECTION en millimètres carrés	RÉSISTANCE à la traction	RÉSISTANCE AU FLAMBEMENT EN KILOGRAMMES PAR MILLIMÈTRE CARRÉ $\frac{l}{r}$ étant égal à : 40	43,25	50	51,9	60	60,55	69,2	70	86,5	103,8	121,11	173	242	346
Fer		......	Rect. 11×23	253	35,0	—	23,8	—	23,0	—	22,5	22,0	—	19,9	15,5	12,4	6,4	3,3	1,6
Fer	naturel	......	Rect. 10×17	170	39,0	—	27,2	—	—	—	26,2	—	—	23,0	—	—	—	—	—
Fer	naturel	......	Rect. 10×17	170	40,0	—	29,0	—	—	—	25,1	—	—	25,1	—	—	—	—	—
Fer	naturel	......	I	215	40,0	28,6	—	27,7	—	24,1	—	—	22,2	—	—	—	—	—	—
Fer	naturel	......	L	175	37,7	28,7	—	27,2	—	22,6	—	—	21,1	—	—	—	—	—	—
Fer	naturel	......	L	165	37,2	28,0	—	26,9	—	24,8	—	—	21,0	—	—	—	—	—	—
Fer	naturel	......	⊔	127	37,8	31,9	—	29,0	—	27,9	—	—	26,3	—	—	—	—	—	—
Fer	naturel	......	⊥	77	40,5	28,8	—	27,0	—	25,3	—	—	23,3	—	—	—	—	—	—
Fer	naturel	......	+	125	43,7	34,0	—	34,3	—	30,9	—	—	28,6	—	—	—	—	—	—
Fer	recuit	......	I	215	35,9	25,8	—	25,8	—	23,6	—	—	20,3	—	—	—	—	—	—
Fer	recuit	......	L	175	35,5	24,5	—	23,7	—	20,5	—	—	21,1	—	—	—	—	—	—
Fer	recuit	......	L	165	36,2	26,9	—	24,1	—	21,8	—	—	19,8	—	—	—	—	—	—
Fer	recuit	......	⊔	127	35,7	28,8	—	24,9	—	23,8	—	—	21,6	—	—	—	—	—	—
Fer	recuit	......	⊥	77	42,2	26,1	—	26,2	—	23,3	—	—	20,8	—	—	—	—	—	—
Fer	recuit	......	+	125	42,0	30,0	—	28,9	—	27,3	—	—	22,6	—	—	—	—	—	—
Acier	naturel	M. 9. . . .	Rect. 10×17	170	40,2	—	28,6	—	—	—	25,4	—	—	22,0	—	15,6	7,8	—	—
Acier	naturel	1.	Rect. 10×17	»	43,3	—	26,0	—	25,1	—	24,5	23,2	—	19,5	18,0	14,0	—	—	—
Acier	naturel	2.	Rect. 10×17	»	47,0	—	28,0	—	27,3	—	26,5	25,6	—	21,3	18,3	—	—	—	—
Acier	naturel	M. 10 . . .	Rect. 10×17	»	47,6	—	32,6	—	—	—	28,4	—	—	24,6	—	—	—	—	—
Acier	naturel	3.	Rect. 10×17	»	54,1	—	28,0	—	27,3	—	26,3	24,3	—	20,1	18,7	—	—	—	—
Acier	naturel	4.	Rect. 10×17	»	55,5	—	28,5	—	28,2	—	28,0	27,7	—	24,1	19,6	—	—	—	—
Acier	naturel	M. 11 . . .	Rect. 10×17	»	56,1	—	33,3	—	—	—	32,4	—	—	23,8	—	—	—	—	—
Acier	naturel	5.	Rect. 10×17	»	58,2	—	30,0	—	29,5	—	28,5	26,5	—	23,6	18,3	15,2	—	—	—
Acier	naturel	M. 12 . . .	Rect. 10×17	»	62,1	—	35,7	—	—	—	33,3	—	—	25,4	—	—	—	—	—
Acier	naturel	7.	Rect. 10×17	»	62,7	—	36,3	—	34,8	—	—	32,7	—	24,2	19,2	—	—	—	—
Acier	naturel	M. 13 . . .	Rect. 10×17	»	66,1	—	36,2	—	—	—	—	—	—	26,2	—	16,0	7,9	—	—
Acier	naturel	8.	Rect. 10×17	»	68,9	—	40,0	—	30,0	—	37,0	33,0	—	27,3	19,5	15,2	—	—	—
Acier	laminé à froid	5. .	Rect. 9×17	153	62,1	—	44,8	—	42,0	—	—	35,9	—	27,3	—	—	—	—	—
Acier	recuit	M. 9. . . .	Rect. 10×17	170	39,6	—	22,1	—	—	—	—	—	—	16,7	—	—	—	—	—
Acier	recuit	1.	Rect. 10×17	»	40,8	—	23,2	—	—	—	—	—	—	17,0	—	—	—	—	—
Acier	recuit	2.	Rect. 10×17	»	[illegible]	—	[illegible]	—	—	—	—	—	—	[illegible]	—	—	—	—	—

16. — *Conclusions générales tirées des expériences de MM. Bauschinger, Tetmayer et Considère. Formules empiriques pour le cas principal. Tables des valeurs de la charge dangereuse pour le fer et l'acier doux.*

Les résultats obtenus par MM. Bauschinger, Tetmayer et Considère par leurs expériences très soignées nous mettent en mesure de déterminer d'une manière satisfaisante, au point de vue pratique, la résistance des pièces comprimées en fer et en acier doux, quand elles se trouvent dans les conditions du cas principal. Nous avons indiqué, sur les *fig.* 2 et 3, Planche page 364bis, les résultats des expériences de MM. Bauschinger, Tetmayer et Considère, en prenant comme abscisses les valeurs $\frac{l}{r}$ et comme ordonnées les valeurs de la charge dangereuse β, selon les tables des paragraphes 13, 14 et 15. La *fig.* 2 réunit les expériences des trois expérimentateurs sur des barres en fer soudé; la *fig.* 3 représente les expériences de M. Tetmayer sur le fer fondu et une partie de celles de M. Considère sur l'acier doux.

Il est indispensable de faire remarquer que, comme la résistance du fer fondu, essayé par M. Tetmayer dans ses expériences, était de $3^t,86$ à $4^t,70$ par centimètre carré, nous n'avons cru devoir ne porter sur la *fig.* 3 que les expériences de M. Considère qui ont été faites avec des barres en acier doux non recuit (Marque M — 9,1, 2 et M — 10), dont la résistance à la rupture était de $4^t,02$ à $4^t,76$ par centimètre carré et possédant ainsi à peu près les mêmes qualités que le fer fondu. La ligne ABC sur la *fig.* 2 représente la formule d'Euler (2_1) dans laquelle on a substitué à E la valeur moyenne du coefficient d'élas-

ticité pour le fer soudé E = 2.000 tonnes, d'où l'on déduit

$$(2'_1) \qquad \beta = 19740 \left(\frac{r}{l}\right)^2 \text{ tonnes par centimètre carré.}$$

La ligne ABC sur la *fig.* 3 représente la même formule d'Euler dans laquelle on a substitué à E la valeur moyenne de ce coefficient trouvé par M. Tetmayer pour le fer fondu E = 2.156 tonnes.

On en déduit

$$(2''_1) \qquad \beta = 21279 \left(\frac{r}{l}\right)^2.$$

En considérant les figures, on voit que, tant que β reste inférieur à la limite d'élasticité, les résultats des expériences coïncident d'une manière satisfaisante avec la ligne ABC; mais qu'à mesure que β s'approche de cette limite, les charges dangereuses réelles s'écartent sensiblement des charges théoriques. Ces écarts croissent graduellement à mesure que le rapport $\frac{l}{r}$ diminue. La droite $\beta = a - b\left(\frac{l}{r}\right)$, proposée par M. Tetmayer, peut être considérée comme l'expression empirique la plus simple et la plus satisfaisante du rapport entre β et $\frac{l}{r}$, si l'on y détermine les coefficients a et b, en appliquant aux résultats des expériences de MM. Bauschinger, Tetmayer et Considère la méthode des moindres carrés. C'est ainsi que nous avons trouvé les formules suivantes exprimées en tonnes par centimètre carré

a. Pour le fer soudé

$$(2'''_1) \qquad \beta = 3{,}3907 - 0{,}01648\,\frac{l}{r};$$

b. Pour le fer fondu

$$(2^{\text{IV}}_1) \qquad \beta = 3{,}387 - 0{,}01483\,\frac{l}{r}.$$

Ces formules sont désignées sur les figures par les lignes BD. Les points d'intersections des lignes ABC et BD indiquent les limites de l'application des formules respectives $(2_1')$ et $(2_1''')$ pour le fer soudé et $(2_1'')$ et (2_1^{iv}) pour le fer fondu et l'acier doux. La valeur minima $\frac{l}{r}$, à laquelle on devrait borner l'application des formules théoriques $(2_1')$ et $(2_1'')$ et au-dessous de laquelle on devrait se servir des formules empiriques $(2_1''')$ et (2_1^{iv}), peut être déterminée en éliminant respectivement β des équations $(2_1')$, $(2_1''')$ et $(2_1'')$, (2_1^{iv}) deux par deux.

Par là, on arrive aux limites

a. Pour le fer soudé. . . . . . $\frac{l}{r} = 114{,}7;$

b. Pour le fer fondu . . . . . . $\frac{l}{r} = 110{,}1;$

Pour simplifier, autant que possible, l'application de ces formules au calcul des pièces comprimées, nous avons constitué, avec l'obligeant concours de M. l'ingénieur Marcousé, la table suivante où les charges dangereuses sont calculées en tonnes par centimètre carré pour les valeurs correspondantes de $\frac{l}{r}$ de 20 à 200. Ces charges sont calculées, pour le fer soudé, d'après les formules $(2_1')$ et $(2_1''')$, selon que $\frac{l}{r}$ sera plus grand ou plus petit que 114,7 ; pour le fer fondu, d'après $(2_1'')$ et (2_1^{iv}), selon que $\frac{l}{r}$ sera plus grand ou plus petit que 110,1.

haute importance, il nous a paru indispensable d'étudier la flexion d'une pièce curviligne soumise à l'action d'efforts extérieurs un peu excentriques appliqués à ses extrémités. Cet essai, exposé dans la note B, nous a conduit aux conclusions suivantes :

a. L'équation (13), exigeant que l'effort de compression appliqué aux extrémités libres d'une tige élastique, ne dépasse pas la neuvième partie de l'effort dangereux, déterminé par les formules $(2_1')$, $(2_1'')$, $(2_1''')$, (2_1^{IV}), constitue une condition indispensable pour assurer la solidité de la pièce dans le cas où son axe est absolument rectiligne, et où les efforts sont appliqués à ses extrémités sans aucune excentricité. Il va de soi que l'équation devra être satisfaite dans les conditions moins avantageuses, c'est-à-dire quand l'axe aura déjà subi quelque courbure avant le commencement de la flexion et quand il se produira quelque excentricité. Mais, dans le premier cas, purement idéal, cette condition est nécessaire et suffisante, tandis que, dans le dernier cas, elle est simplement nécessaire ;

b. Dans le cas où l'axe primitif de la pièce aurait une certaine courbure et où l'application des efforts de compression serait un peu excentrique, il se produirait une flexion et la charge de compression ne se répartirait pas uniformément sur toute la section transversale. La charge supplémentaire, c'est-à-dire la différence entre la plus grande valeur de la compression N et sa valeur apparente moyenne $\beta = \frac{P}{\omega}$, pour les pièces présentant les valeurs égales du rapport $\frac{l}{r}$, n'est pas la même, mais croît en raison directe du rapport $\frac{V_0}{r}$, où V_0 exprime la distance entre les fibres les plus éloignées et le centre de gravité de la base. Il faut, par conséquent,

éviter, pour les pièces comprimées, des sections où $\frac{V_0}{r} > 2,75$;

c. Les efforts de compression maxima N dans les fibres extrêmes de la section la plus fatiguée ne doivent pas dépasser de beaucoup les charges de sécurité R admissibles pour la simple compression. La flèche de la courbure fortuite de l'axe primitif des pièces comprimées f ne dépasse pas ordinairement 0,001 de leur longueur totale, et l'excentricité inévitable e ne va pas au delà de $0,05r$ à $0,1r$, selon la valeur de $\frac{l}{r}$.

En acceptant ces valeurs maxima de f et e et en admettant, en même temps, que la condition la moins avantageuse est réalisée quand $\frac{V_0}{r} = 2,75$ et $\frac{J}{R} = 3,4$, on trouve que, si la valeur apparente moyenne de la charge de compression ne dépasse pas la limite (13), la compression maxima N des fibres extrêmes de la section la plus fatiguée sera inférieure à la charge de sécurité R si l'on a

$\frac{l}{r} > 58$ pour le fer fondu,

$\frac{l}{r} > 73$ — soudé.

Quand $\frac{l}{r}$ est inférieur à ces limites, les valeurs de N ne peuvent dépasser R que de très peu, et la différence pourra être négligée tout à fait, étant donné que les extrémités des pièces de constructions métalliques ne sont jamais complètement libres. Ainsi, par exemple, pour le fer fondu, même dans la condition la plus désavantageuse, c'est-à-dire quand $\frac{l}{r} = 20$, la compression N ne dépasse R que de 9 p. 100. Il s'ensuit que la vérification des pièces comprimées, d'après les formules ($2'_1$), ($2''_1$),

$(2_1''')$ et (2_1^{iv}), nous donne non seulement une garantie de leur stabilité par rapport au flambement, mais prouve en même temps qu'à la flexion produite par l'excentricité inévitable et par la courbure fortuite de l'axe primitif, N ne peut pas dépasser R d'une manière sensible.

Ainsi les doutes concernant la possibilité d'appliquer ces formules au calcul des constructions métalliques, sont dénués de fondement dans le cas où les courbures et les excentricités primitives ne dépassent pas les limites indiquées, c'est-à-dire quand elles ne sont que des conséquences inévitables des défauts de construction et de l'imparfaite homogénéité du métal. Quand les excentricités deviennent plus considérables, il faut recourir aux formules déduites dans la note B.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS.

---

§ 18. — *Considérations générales.*

Avant de passer aux applications, nous devons remarquer qu'en ce qui concerne le fer et l'acier doux, il n'y a que le seul cas de flambement d'une tige à bouts articulés, comprimée par des efforts appliqués aux extrémités libres de son axe, qui ait été étudié d'une manière complètement satisfaisante, aussi bien dans les limites d'élasticité qu'au delà de ces limites.

C'est *le cas principal.*

Les cas connus antérieurement, ainsi que ceux que nous avons considérés, n'ont été étudiés théoriquement que dans les limites d'élasticité.

Nous avons donné pour tous ces cas, au chapitre I, les valeurs du coefficient de longueur μ_n. Ainsi, pour déterminer dans chacun d'eux la charge dangereuse, inférieure à la limite d'élasticité, on pourra se servir de la formule (2_1) [pour le fer et l'acier doux $(2'_1)$ et $(2''_1)$], en substituant à l la longueur réelle de la pièce, l_n, multipliée par le coefficient de longueur μ_n, $l = \mu_n l_n$.

Nous pouvons admettre également que le coefficient de longueur conserve sa valeur, même dans le cas où le flambement se produit sous des charges supérieures à la limite d'élasticité (*). En conséquence, il est facile de trouver la valeur de la charge dangereuse dépassant la limite d'élasticité, en substituant dans les formules empiriques du cas principal $\mu_n l_n$ à l. Les formules $(2'''_1)$ et (2^{IV}_1), ou bien la table du paragraphe 16, peuvent servir pour le fer et l'acier doux. Ainsi, pour déterminer dans des différents cas de flambement la charge dangereuse, supérieure à la limite d'élasticité, on les ramenera au cas

(*) Dans certains cas, on pourra exactement démontrer la justesse de cette supposition. On pourra démontrer, par exemple, pour une pièce chargée debout, à une extrémité encastrée et l'autre libre, que le coefficient de longueur, égal à 2 au-dessous de la limite d'élasticité, conserve la même valeur au-dessus de cette limite. En effet, les parties aO et Ob (*fig.* 14) d'une tige ab, comprimée selon les conditions du cas principal, peuvent être considérés comme tiges chargées debout et ayant une extrémité encastrée et l'autre libre. Mais le point O, où la tangente Ox à l'axe courbé sans point d'inflexion, est parallèle à la droite ab, doit, par raison de symétrie, être toujours placé au milieu de l'axe; en conséquence, le rapport entre les longueurs aO et ab, qui représente la valeur du coefficient de longueur, est toujours égal à 2, indépendamment de la valeur de la charge.

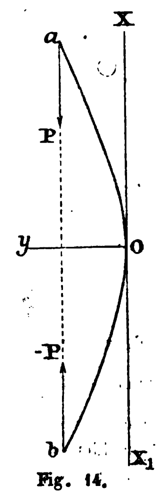


Fig. 14.

Nous ne pouvons pas encore prouver l'exactitude de cette supposition pour tous les cas du flambement étudiés au chapitre I. Il est cependant facile de voir que l'invariabilité du coefficient de longueur, hors des limites d'élasticité, est une simple conséquence de la supposition que, pour

principal, en se servant de la méthode établie pour les charges inférieures à cette limite.

Il reste encore à déterminer le coefficient de longueur pour les pièces métalliques chargées debout, dont les extrémités sont rivées à d'autres parties de la construction. Il est hors de doute que, si le nœud rivé a été effectué bien au centre et ajusté avec précision, la condition de son établissement tient le milieu entre l'encastrement et l'articulation complète. Il faudrait cependant tenir compte de ce que les parties de la construction, aux-

---

tous les cas considérés (*fig.* 15), la charge dangereuse β_n, au-dessus d'une

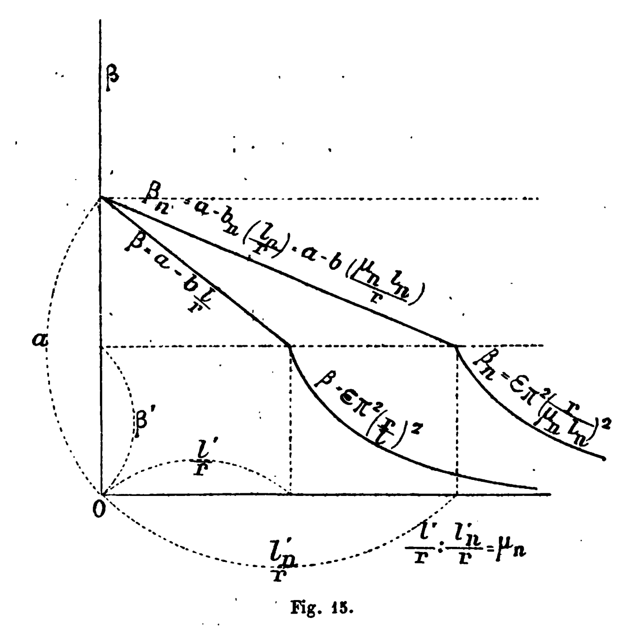


Fig. 15.

valeur déterminée β', qui ne dépend que de la nature de la matière, peut s'exprimer en fonction de $\frac{l}{r}$ par les ordonnées d'une droite $\beta_n = a - b_n\left(\frac{l_n}{r}\right)$, où le coefficient b_n a des valeurs différentes pour divers cas de flambement, et le coefficient a, qui représente approximativement la résistance à l'écrasement, reste invariable.

quelles sont rivées les pièces comprimées, ne sauraient être considérées comme parfaitement rigides, et qu'elles se déforment toujours un peu quand ces dernières commencent à fléchir. Outre cela, un nœud rivé n'est jamais établi avec une précision telle, que la résultante des efforts de compression puisse coïncider rigoureusement avec l'axe de la pièce. En vue de cette incertitude il conviendrait, par mesure de précaution, de considérer ces pièces dans les calculs comme ayant des bouts articulés.

§ 19. — *Montants verticaux des poutres de ponts sans contreventement supérieur.*

Les formules (1), (1_1), (1_2) du premier cas, peuvent être appliquées aux calculs de la résistance des montants verticaux de poutres de ponts, dont les semelles supérieures ne sont pas reliées entre elles (*fig.* 28, 29 et 32 ci-après). Ces montants, bien que rivés aux semelles supérieures, ne rencontrent point, en fléchissant, de la part de ces semelles une résistance suffisante pour maintenir leurs extrémités dans le plan du treillis ; ils doivent eux-mêmes, au contraire, opposer une résistance au flambement latéral des semelles. Il en résulte que ces montants se trouvent dans les conditions du premier cas, et qu'il faudrait leur appliquer les formules du cas principal, en y faisant $l = 2\,l_1$, en appelant l_1 la longueur comprise entre le centre de gravité de la semelle supérieure et le point d'encastrement sur la pièce de pont.

§ 20. — *Treillis des poutres à bandes parallèles.*

Les formules (11_2) et (12_2) peuvent servir à vérifier la résistance des treillis au flambement latéral.

Leur application aux poutres exposées à l'action d'une charge permanente ne présente aucune difficulté ; car les efforts que subissent les barres du treillis sont

constants et par conséquent, la valeur Q pourra être trouvée directement dans les tableaux des efforts. Rappelons seulement qu'en appliquant ces formules à une barre comprimée, il faut substituer à Q et J_1 les valeurs correspondantes à la plus faible des barres qui s'entre-croisent avec la barre considérée, c'est-à-dire qui donne la valeur maxima pour μ. La détermination pour chaque cas particulier de la plus faible des barres à celle qui croisent la barre considérée, est aisée et peut se faire à vue d'œil.

La vérification des treillis des poutres soumises aux actions des surcharges mobiles est plus compliquée. Dans ce dernier cas, en vérifiant la résistance au flambement latéral d'une barre comprimée, il faut substituer à Q, dans les formules indiquées, non pas l'effort maximum que subit la plus faible des barres s'entre-croisant avec la barre considérée, mais celui auquel est exposée la plus faible barre sous l'action de la charge correspondante à l'effort maximum de la barre considérée.

Dans l'application aux poutres de ponts à bandes parallèles, cette valeur Q peut être facilement exprimée à l'aide de l'effort maximum U, correspondant à la barre comprimée et indiqué dans les tableaux des efforts. En effet, on voit que

a) Pour les poutres à treillis symétriques, dans un pont à voie supérieure (*fig.* 16), on a

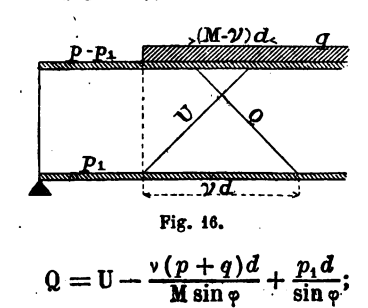


Fig. 16.

$$Q = U - \frac{\nu(p+q)d}{M \sin\varphi} + \frac{p_1 d}{\sin\varphi}; \qquad (14_1)$$

b) Pour les poutres à treillis symétriques, dans les ponts à voie inférieure (*fig.* 17),

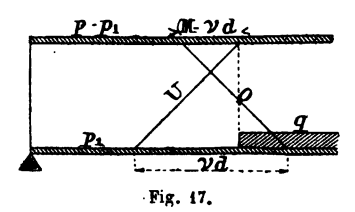


Fig. 17.

$$(14_2) \qquad Q = U - \frac{\nu p d}{M \sin\varphi} + \frac{p_1 d}{\sin\varphi};$$

c) Pour les poutres de ponts à voie inférieure avec montants verticaux (*fig.* 18),

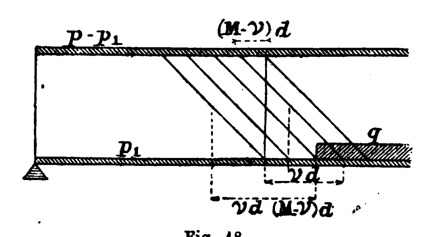


Fig. 18.

$$(14_3) \qquad Q = \frac{U}{\sin\varphi} - \frac{\nu p d}{M \sin\varphi} + \frac{p_1 d}{\sin\varphi}.$$

Dans ces formules,

- Q exprime l'effort cherché;
- U l'effort maximum de compression de la barre considérée;
- q la surcharge par unité de longueur ayant servi à calculer l'effort U;
- p la charge permanente par unité de longueur de la poutre;
- p_1 la partie de la charge permanente p qui agit sur la semelle inférieure;
- ν le nombre de petits panneaux compris entre le nœud inférieur de la barre considérée et celui de la plus faible des barres s'entre-croisant avec elle;
- M le nombre de système des barres;
- d la longueur d'un petit panneau;
- φ l'angle formé par la barre inclinée et la bande.

Les formules (11_2) et (12_2) ont été appliquées à la vérification des ponts du chemin de fer Nicolas; les valeurs obtenues pour μ variaient entre 0,59 et 1.

Ceci prouve qu'on ne devrait pas se contenter pour μ d'une valeur moyenne approximative, par exemple de 2/3 ou 3/4, comme on l'a souvent fait en Allemagne et en Russie.

La *fig.* 19 représente le schéma de la moitié d'une

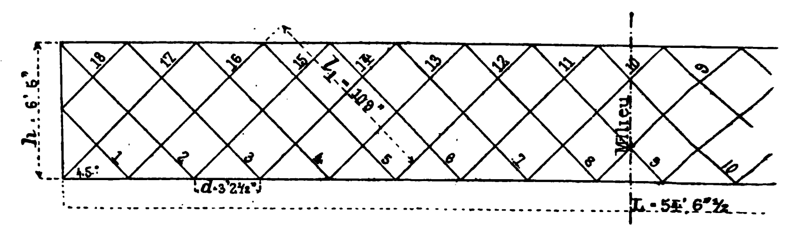


Fig. 19.

poutre du pont sur la rivière Tigoda du chemin de fer Nicolas; les principales données qui ont servi aux calculs de la résistance au flambement des barres, ainsi que les résultats obtenus, sont résumés dans le tableau ci-dessous, en mesures russes (pouds et pouces) (*).

(*) 1 poud = 16kg,38.
1 pouce = 0m,0254.

des barres comprimées	SECTIONS transversales des barres comprimées	RAYON de giration r	SURFACE de la section transversale s demi-nette	SURCHARGE q par unité de longueur	EFFORT de compression z	EFFORT par unité de surface $z : s$	NUMÉROS des plus faibles barres s'entre-croisant avec la compression	$\frac{L_1}{l}$	Q	μ	$\frac{l}{r}$	CHARGE DANGEREUSE par unité de surface β	CHARGE DE SÉCURITÉ de la simple compression R	CHARGE ADMISSIBLE de compression R_1
9	L $3'' \times 3'' \times 3/8''$	0,93	1,98	83,8	−225	114	10	1,00	+ 27	0,70	82	803	236	156
10				80,4	−279	141			− 16	0,71	83	797	246	161
11	L $3\,1/2'' \times 3\,1/2'' \times 3/8''$	1,09	2,33	76,3	−332	142	9	0,61	+ 50	0,78	78	829	255	173
12				73,7	−391	168	8		+119	0,77	77	836	265	182
13				71,5	−455	195	7		+190	0,76	76	842	275	190
14	L $4'' \times 4'' \times 1/2''$	1,23	3,56	70,0	−522	147	6	0,30	+262	0,85	76	842	277	191
15				67,3	−583	164	3		+511	0,93	82	803	279	184
16	⊥ $6\,1/2'' \times 4'' \times 1/2''$	1,16	4,78	65,4	−649	136	3	0	+492	0,94	88	764	281	177
17				63,8	−719	150	3		+481	0,94	88	764	283	178

Les efforts Q sont calculés d'après la formule (14_1), et les charges admissibles de compression par unité de surface R_1 d'après la formule ($2''_1$), en pouds par pouce carré, s'expriment par la formule

$$R_1 = \frac{1}{n}\left(1.335 - 6,49\,\frac{l}{r}\right),$$

dans laquelle

$$n = \frac{T_{\min}}{R} = \frac{1220}{R}.$$

Les surcharges q et les tensions de sécurité R pour chaque barre étaient celles qui étaient indiquées par une circulaire ministérielle.

§ 21. — *Parties comprimées des semelles de poutres métalliques.*

La vérification du flambement des semelles comprimées doit se faire aussi bien dans le plan de la poutre que dans un plan perpendiculaire. On vérifie la résistance au flambement de la semelle dans le plan de la poutre, en considérant chacune de ses parties comprise entre deux nœuds voisins comme une tige à extrémités libres. La vérification s'effectue d'après les formules ($2_1'''$) et (2_1^{IV}), en prenant pour l la longueur du petit panneau. Quant au flambement latéral, nous ne considérerons que les deux cas suivants : 1° les nœuds du contreventement sont placés dans le plan des semelles supérieures et coïncident avec les nœuds du treillis principal; 2° les nœuds ne coïncident que de deux en deux intervalles (*fig.* 20).

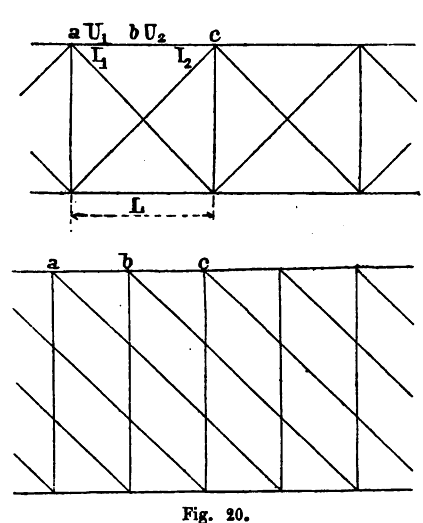


Fig. 20.

Dans le premier cas, le calcul de la résistance s'effectue d'après les mêmes formules en prenant pour l la longueur du petit panneau, et pour r le rayon de giration correspondant; dans le second cas, il faut considérer la partie abc de la semelle située entre les nœuds consécutifs a et c du contreventement supérieur, comme une pièce composée de deux tiges ab et bc à axe commun, comprimée par des forces P_1, P_2 et $-(P_1+P_2)$, appli-

quées aux points a, b et c. Les extrémités a et c peuvent pivoter librement, mais sont astreintes à rester sur la droite ac.

Ces conditions correspondent à celles du cinquième cas. Désignons par $U_1 = P_1$ et $U_2 = P_1 + P_2$ les efforts de compression qui agissent sur les parties ab et bc, et par I_1 et I_2, r_1 et r_2 les moments d'inertie et les rayons de giration respectifs des sections transversales, par rapport aux axes verticaux passant par les centres de gravité. Nous considérons la partie ac comme une tige à extrémités libres, à section constante (de rayon de giration r_2) ayant la longueur $l = \mu L$, L étant la longueur totale ac. Le coefficient de longueur μ peut être obtenu par la table du paragraphe 9 (10e cas), d'après les valeurs des rapports $\frac{I_2}{I_1}$ et $\frac{U_2}{U_1} = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$. Supposons que l'on ait :

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = 44.933^{kg}; \\ U_2 = 48.979^{kg}; \end{array}\right\} \frac{U_2}{U_1} = 1,09;$$

$$\begin{array}{lll} \omega_1 = 88,47 cm^2; & I_1 = 458 cm^4; & r_1 = 2.275 cm; \\ \omega_2 = 105 cm^2; & I_2 = 916 cm^4; & r_2 = 2,393 cm; \end{array}\Bigg\} \frac{I_2}{I_1} = 2,00;$$

$$L = 2,438 m.$$

Nous trouvons la valeur du coefficient μ dans la table indiquée, dans la colonne correspondante à la valeur $\frac{I_2}{I_1} = 2$, en interpolant entre les nombres 1,24 et 1,16 relatifs aux valeurs $\frac{U_2}{U_1} = 1,00$ et 1,25. Nous trouvons ainsi

$$\mu = 1,24 - (1,24 - 1,16) \frac{1,09 - 1,00}{1,25 - 1,00} = 1,21,$$

d'où l'on déduit

$$l = 1,21 \times 2,438 = 2,95 m,$$

et

$$\frac{l}{r^2} = \frac{2,95}{2,953} = 100.$$

La charge dangereuse d'après la table du paragraphe 16 sera

$$\beta = 1743^{kg} \text{ par centimètre carré,}$$

et la charge de sécurité

$$R_1 = \frac{6,5}{31} 1,743 = 365^{kg} \text{ par centimètre carré.}$$

Les charges réelles sont égales,

a) dans la partie *ab*,

à $$N_{ab} = \frac{44.933}{88,47} = 508^{kg} \text{ par centimètre carré;}$$

b) dans la partie *cd*,

à $$N_{cd} = \frac{48.979}{105} = 466^{kg} \text{ par centimètre carré;}$$

par suite la semelle considérée est trop faible.

§ 22. — *Poutre à bandes parallèles, chargée au milieu de la portée.*

Considérons une poutre à treillis à bandes parallèles, appuyée librement sur ses extrémités A et B (*fig.* 21), et

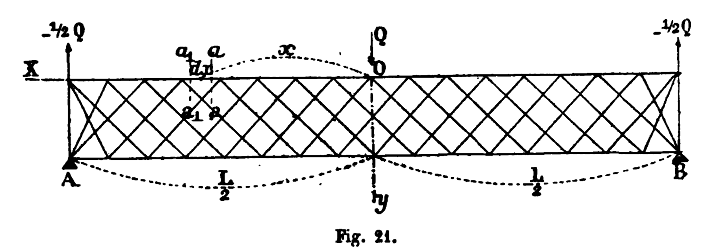


Fig. 21.

soumise à l'action d'une force Q, appliquée en son milieu O, agissant dans le plan de la poutre et perpendiculaire à son axe. Plaçons le centre des coordonnées au point O;

dirigeons l'axe des x parallèlement à l'axe primitif de la semelle, et l'axe des y dans le sens de la force Q.

L'effort de compression de la semelle dans une section distante de ξ du centre des coordonnées, peut être exprimé par la formule approximative qui suit :

$$C_\xi = \frac{M_\xi}{h} = \frac{Q}{2h}\left(\frac{L}{2} - \xi\right).$$

Dans les sections aa et $a_1 a_1$, distantes du centre des coordonnées de $\xi_1 = x - \frac{1}{2}\,dx$ et de $\xi_2 = x + \frac{1}{2}\,dx$, nous aurons :

$$C_{aa} = \frac{Q}{2h}\left[\frac{L}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\,dx\right)\right],$$
$$C_{a_1 a_1} = \frac{Q}{2h}\left[\frac{L}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\,dx\right)\right].$$

En soustrayant la seconde expression de la première, nous trouvons la valeur suivante de l'accroissement de l'effort sur l'élément dx

$$C_{aa} - C_{a_1 a_1} = \frac{Q}{2h}\,dx.$$

Cette valeur est indépendante de l'abscisse x. De cette manière, la semelle supérieure de la poutre AB, par rapport au flambement latéral, peut être considérée comme une tige à extrémités libres, comprimée par des forces uniformément réparties le long de l'axe, symétriques par rapport à son milieu et dirigées vers ce point. Cette force est répartie à raison de

$$p = \frac{Q}{2h},$$

unités de poids par unité de longueur prise sur l'axe. Ces conditions correspondent au sixième cas (§ 5); on aura donc

$$\mu_6 = 0{,}56.$$

Cette formule n'est applicable qu'aux poutres libres, c'est-à-dire à celles qui ne sont pas réunies à d'autres parties de la construction pouvant opposer une résistance au flambement latéral de la semelle supérieure.

L'application que nous venons de faire des formules du sixième cas, est fondée sur la supposition que la semelle supérieure présente une section constante.

Cependant, si cette condition n'est pas réalisée, on pourrait trouver deux limites entre lesquelles est comprise la charge dangereuse, en prenant pour r les rayons correspondants à la plus petite et à la plus grande des sections.

§ 23. — *Poutre à bandes parallèles, soumise à l'action d'une charge uniformément répartie sur toute sa longueur.*

Disposons les axes des coordonnées comme l'indique la *fig.* 22. L'effort de compression, dans une section

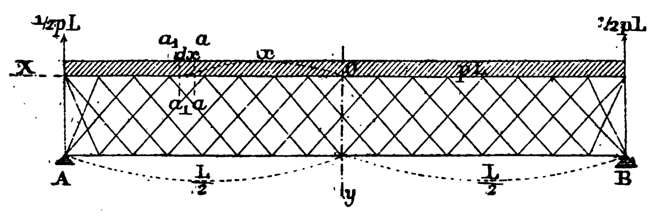


Fig. 22.

placée à une distance ξ du centre des coordonnées, s'exprime par la formule

$$C_\xi = \frac{M_\xi}{h} = \frac{q}{2h}\left(\frac{L^2}{4} - \xi^2\right).$$

Dans les sections aa et a_1a_1, distantes du centre des

coordonnées de $x - \frac{1}{2}\,dx$ et $x + \frac{1}{2}\,dx$, nous avons :

$$C_{aa} = \frac{q}{2h}\left[\frac{L^2}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\,dx\right)^2\right],$$
$$C_{a_1a_1} = \frac{q}{2h}\left[\frac{L^2}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\,dx\right)^2\right].$$

En soustrayant de la première expression la seconde, nous arrivons à la valeur suivante de l'accroissement de l'effort de compression, correspondant à la longueur de l'élément infiniment petit dx

$$C_{aa} - C_{a_1a_1} = \frac{q}{h}\,x\,dx.$$

Cette quantité est proportionnelle à l'abscisse x du milieu de l'élément dx. De cette manière, la semelle supérieure, par rapport au flambement latéral, peut être considérée comme une tige placée dans les conditions du huitième cas (§ 7). Nous avons donc

$$\mu_8 = 0{,}6938.$$

Ici aussi, on a supposé la poutre comme libre et sa semelle supérieure comme ayant une section constante ; dans le cas contraire, on pourra trouver pour β deux limites prenant pour r ses valeurs maxima et minima.

Nous avons supposé jusqu'ici la poutre libre ; néanmoins, cette théorie s'applique aux poutres des ponts dont les semelles supérieures sont reliées par des contreventements horizontaux, comme le montre la *fig.* 23.

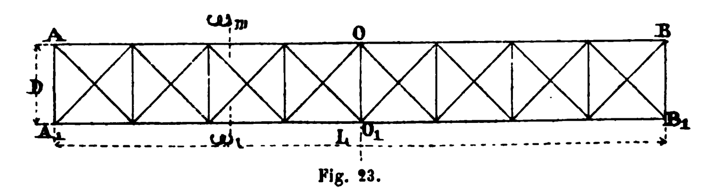


Fig. 23.

Les semelles supérieures AB et A_1B_1 des poutres principales sont réunies par des entretoises et des diago-

nales, et peuvent être considérées comme une poutre élastique horizontale, soumise à l'action d'efforts de compression répartis comme dans le huitième cas (§ 7). Le moment d'inertie d'une section m dans une pareille poutre peut être exprimé approximativement par la formule

$$I_m = 2\,\omega_m \left(\frac{1}{2} D\right)^2,$$

et son rayon de giration par

$$r = \frac{1}{2} D.$$

La charge dangereuse pourra être déterminée par les formules du cas principal en posant

$$(15) \qquad \frac{l}{r} = 0{,}6938 \frac{L}{\frac{1}{2} D} = 1{,}3876 \frac{L}{D}.$$

Toutefois, la formule (15) devra être appliquée quand elle donne des valeurs $\frac{l}{r}$ plus grandes que celles auxquelles on arrive en considérant séparément chaque partie de la semelle comprise entre deux nœuds consécutifs, ce qui aura lieu pour les ponts à grande portée.

Nous arrivons ainsi à la conclusion que la charge de sécurité admissible pour la compression des semelles dépend, entre autres, des proportions principales du pont, c'est-à-dire du rapport entre la longueur de la travée et sa largeur, comme il fallait s'y attendre d'ailleurs.

En établissant la formule (15), nous avons considéré les deux semelles supérieures comme formant une poutre horizontale absolument libre ; nous y avons donc négligé les réactions au flambement latéral, opposées par la poutre formée des semelles tendues et du contreventement inférieur. Dans les ponts à voie supérieure, cette réaction peut se transmettre aux semelles comprimées

par l'intermédiaire des croix de Saint-André. Dans les ponts à voie inférieure, elle est transmise par l'intermédiaire du treillis des poutres principales. Dans le dernier cas il peut se produire un gauchissement du treillis; il est donc indispensable que la poutre horizontale supérieure soit assez rigide pour pouvoir résister au flambement latéral sans l'aide de la résistance de la poutre inférieure, ce qui aurait pour conséquence la déformation de la construction entière.

§ 24. — *Calcul approximatif de la stabilité latérale des ponts sans contreventement supérieur.*

Les enquêtes ouvertes pour la détermination des causes de l'effondrement de certains ponts métalliques sans contrevement supérieur, ont attiré l'attention sur ce fait, que l'insuffisance de rigidité des semelles supérieures et la faiblesse des montants verticaux pourraient être la cause du flambement latéral des semelles, et amener ainsi l'effondrement. Nous citerons comme exemple, entre autres, les ponts Pansaguel et Miramon en France, Nieder Ursel en Allemagne et de la Khevda en Russie.

Malgré quelques essais (*) qui ont été tentés dans cette voie, on n'est pas parvenu à déterminer d'une manière satisfaisante la relation qui devrait exister entre les dimensions des montants verticaux et des semelles comprimées pour éviter le flambement latéral de ces dernières.

Les considérations théoriques que nous avons exposées au paragraphe 8 nous encouragent à reprendre l'étude de cette intéressante question.

(*) On peut consulter sur ce sujet la note de M. Sylvain Périssé dans les *Mémoires et comptes rendus des travaux de la Société des ingénieurs civils*, décembre 1881, et *Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken*, de M. Engesser, v. II, 1893.

Pour simplifier cette recherche, nous admettons :

a) Que la semelle supérieure est une tige élastique à section constante (*), soumise à l'action des efforts de compression répartis le long de l'axe d'une manière continue, comme dans les cas 8 et 9 (**);

b) Que les montants d'appui sont assez solides pour pouvoir maintenir les bouts de la semelle comprimée dans leur direction droite primitive, et qu'on peut négliger la déformation latérale des montants au droit des appuis par rapport à celle des montants intermédiaires;

c) Que chaque montant intermédiaire oppose au flambement latéral des semelles une réaction correspondante au plus faible d'entre eux, et que ces réactions, au lieu d'être appliquées aux nœuds supérieurs des montants, sont réparties d'une manière continue sur toute la longueur de la semelle.

Supposons (*fig.* 24) que les deux semelles comprimées fléchissent dans le plan horizontal vers l'intérieur du pont; les nœuds supérieurs a et b se déplacent en a_1 et b_1, en produisant une flexion latérale des montants verticaux et des pièces de pont. Il en résulte des réactions des pièces de pont au flambement des semelles, appli-

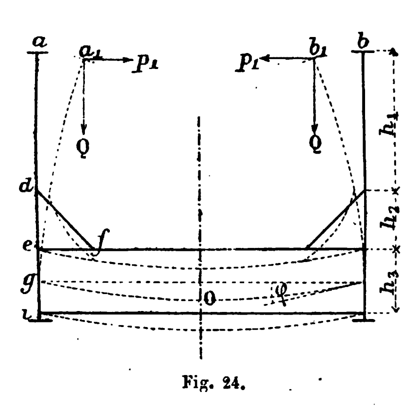


Fig. 24.

(*) En réalité, la section de la semelle est variable et croît en partant des extrémités vers le milieu. En substituant, dans les formules qui suivent, la plus petite et la plus grande valeur du rayon de giration r, nous aurons deux limites entre lesquelles se trouve la valeur réelle de la charge dangereuse.

(**) Cela correspond à une charge uniformément répartie sur toute la travée du pont (*fig.* 24).

quées aux points a_1 et b_1, agissant en sens opposé à la flexion, et proportionnelles à la projection horizontale δ des déplacements $aa_1 = bb_1$. Nous aurons ainsi pour chaque paire de montants

$$p_1 = A\delta,$$

formule où A est un coefficient qui dépend des dimensions des montants, des forces qui agissent sur lui et des dimensions des pièces de pont.

Nous supposerons que le coefficient A est constant pour tous les montants verticaux formant cadre avec les pièces de pont, et qu'il est égal au coefficient A_{min} du plus faible parmi ces cadres. Nous supposerons, en même temps, que la réaction, au lieu d'être appliquée aux nœuds des montants, est répartie le long de la semelle. Cela revient à considérer la semelle comme soumise à une réaction, répartie le long de l'axe à raison de $q = \frac{A_{min}}{c}$ par unité de longueur, c étant la distance entre deux cadres consécutifs. Elle se trouve, en conséquence, dans les conditions du neuvième cas, et son coefficient de longueur pourra être obtenu à l'aide du tableau du paragraphe 8, étant donnés la longueur de la travée l_2 et le coefficient de réaction q.

Il s'agit toutefois de trouver la valeur du coefficient $q = \frac{A_{min}}{c}$. On voit facilement que A est égal au rapport entre la valeur d'une force horizontale p_1 appliquée au nœud supérieur d'un montant vertical, et la projection horizontale du déplacement qu'elle produit. Cette projection δ du déplacement peut être exprimée d'une manière approximative par la formule

$$\delta = \delta_1 + h_1 \operatorname{tang} \varphi_1 + \delta_2 + \left(h_1 + h_2 + \frac{1}{2} h_3\right) \operatorname{tang} \varphi_2,$$

(*fig.* 26) dans laquelle

δ_1 est la flèche produite par un effort horizontal p_1, appliqué à l'extrémité libre d'un montant vertical *ad*, de hauteur h_1, encastré à l'extrémité inférieure (*d*), et comprimé par un effort vertical Q;

δ_2 est la flèche produite par le même effort p_1, appliqué à une distance h_1 de l'extrémité libre d'une console *def* de hauteur h_2, encastrée à sa base inférieure *ef*;

φ_1 et φ_2, les angles formés par les tangentes aux axes fléchis de la console et de l'entretoise aux points *d* et *g*, respectivement avec les tangentes aux points *e* et *o* des mêmes axes.

On déduit de ces équations

$$(16)\quad q=\frac{A}{c}=\frac{p_1}{c\delta}=\frac{p_1}{c\left[\delta_1+h_1\,\text{tang}\,\varphi_1+\delta_2+\left(h_1+h_2+\frac{1}{2}h_3\right)\text{tang}\,\varphi_2\right]}.$$

Pour déterminer δ_1, on peut se servir de la formule déduite dans la note A, d'après laquelle (*)

$$(a)\qquad \delta_1=\frac{p_1(\text{tang}\,mh_1-mh_1)}{EI_1m^3},$$

avec

$$m=\sqrt{\frac{Q}{EI}}.$$

Les valeurs tang φ_1 et δ_2, qui se rapportent à la déformation d'une console *dc* à section variable, peuvent être déterminées par l'intégration de l'équation différentielle de l'axe fléchi de cette pièce (**). Cette intégration ne présente pas de difficulté analytique quand la console a une forme de trapèze; toutefois, cela nous mènerait à des formules très compliquées et peu propres aux applica-

(*) Pour $Q=0$, c'est-à-dire pour $m=0$, la formule (*a*) se réduit à

$$(b)\qquad \delta'=\frac{p_1h_1^3}{3\,EI}.$$

(**) Dans la plupart des cas, les consoles sont d'une telle rigidité qu'on peut négliger sans inconvénient leurs déformations par rapport à celle des montants, ainsi que nous le verrons dans les exemples cités plus bas.

tions. Pour faciliter le calcul, nous pouvons admettre qu'à la place d'une console trapézoïdale *defg* (*fig.* 25), on en ait une rectangulaire df_1eg_1, dans laquelle

$$eg_1 = df_1 = \frac{df + eg}{2}.$$

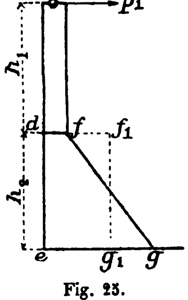


Fig. 25.

Connaissant le moment d'inertie I_2 d'une pareille console, nous trouverons facilement :

$$(c) \qquad \operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{p_1 h_2}{2\,EI_2}(2\,h_1 + h_2),$$

$$(d) \qquad \delta_2 = \frac{p_1 h_2^2}{6\,EI_2}(3\,h_1 + 2\,h_2).$$

Si la console est à treillis, on déterminera les valeurs $\operatorname{tang}\varphi_1$ et δ_2, d'après les formules bien connues de la déformations des systèmes articulés.

De l'équation de l'axe fléchi d'une entretoise, ayant une longueur D, et soumise à l'action d'un moment constant, égal à

$$p_1\left(h_1 + h_2 + \frac{1}{2}\,h_3\right),$$

nous déduirons

$$(e) \qquad \operatorname{tang} \varphi_2 = \frac{p_1 D}{2\,EI_3}\left(h_1 + h_2 + \frac{1}{2}\,h_3\right).$$

En introduisant les valeurs (*a*), (*c*), (*d*) et (*e*) dans l'équation (16), nous arrivons définitivement à la relation

$$(17) \qquad q = \frac{1}{c\left[\frac{1}{EI_1 m^3}(\operatorname{tg} m h_1 - m h_1) + \frac{h_2 h_1}{2\,EI_2}(2\,h_1 + h_2) + \frac{h_2^2}{6\,EI_2}(3\,h_1 + 2\,h_2) + \frac{D}{2\,EI_3}\left(h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2}\right)^2\right]}.$$

Ayant trouvé q, nous déterminerons la valeur

$$b^4 = \frac{q L^4}{16\,EI},$$

et ensuite nous chercherons le coefficient de longueur μ. d'après la table du paragraphe 8. La relation entre μ et b^2 n'est déterminée que pour $b^2 < 2536,8$; bien qu'au-dessus de cette limite la fonction n'ait pas été étudiée, on voit que la courbe, dont les abscisses sont égales à b^2 et les ordonnées à μ, a pour asymptote l'axe des abscisses, car μ est nul seulement quand b^2 est infini. En vue du décroissement très lent de μ pour les valeurs de b^2 qui dépassent 2536,8, on peut faire une hypothèse favorable à la sécurité, dans les calculs de ponts sans contreventement supérieur, en attribuant à μ, au-dessus de cette limite, une valeur constante et égale à 0,143. Il est indispensable de remarquer qu'on doit toujours avoir $\mu > \frac{1}{n}$, où n désigne le nombre de petits panneaux. Dans le cas contraire, la semelle pourrait fléchir, et se courber selon une courbe ondulée, où la longueur de l'onde l serait égale à la distance entre deux nœuds voisins, $l = \frac{L}{n}$.

Pour vérifier cette méthode approximative, nous l'appliquerons à deux ponts effondrés, il y a quelque temps, à cause de l'insuffisance de résistance au flambement latéral, savoir : le pont sur la rivière Khevda (chemin de fer de Morschansk à Syrran), effondré en 1875, et le pont-route sur la rivière Niede, près de Francfort-sur-Mein, en 1892.

La vue du premier de ces ponts, après la catastrophe, est représentée par la *fig.* 4 de la Pl. page 364 bis. Peu de temps après l'achèvement du montage, les poutres s'effondrèrent au passage d'un train de service et s'étalèrent sur l'échafaudage. La cause principale de cet accident était la faiblesse des montants verticaux qui ne pouvaient opposer de réaction suffisante au flambement latéral des semelles. A défaut des renseignements positifs sur le poids et la vitesse du train qui a occa-

sionné l'effondrement, nous prendrons, conformément à la décision ministérielle, une surcharge uniformément répartie de 50 pouds par pied courant. En y ajouant 16 pouds comme poids du pont, nous aurons pour charge totale 66 pouds par pied courant sur chaque poutre.

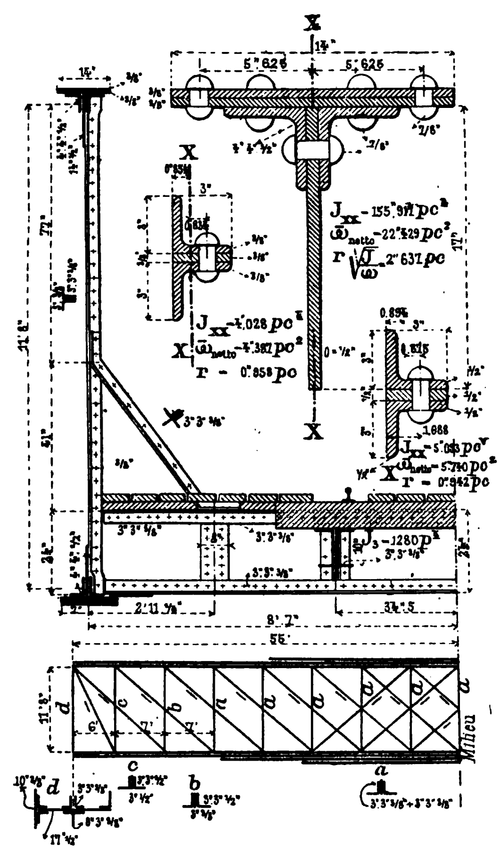


Fig. 26.

Nous avons tracé sur la *fig.* 26 toutes les données nécessaires au calcul en mesures russes.

Commençons par la détermination de q. Il faut remar-

quer que la formule (a)

$$\frac{\delta'}{p_1} = \frac{\operatorname{tang} m h_1 - m h_1}{\mathrm{E I}_1 m_3}$$

peut être appliquée ici, bien que les efforts de compression Q soient appliqués aux montants verticaux avec une excentricité e, variant de 0,854 à 0,894 de pouce (*).

(*) En effet, en désignant par Δ la flèche totale d'une pièce ao (*fig.* 27) d'une longueur h_1, encastrée à une extrémité et soumise à l'autre à l'action d'une force verticale Q et d'une horizontale p_1, appliquée à une distance $ca = e$ de l'extrémité libre, nous aurons

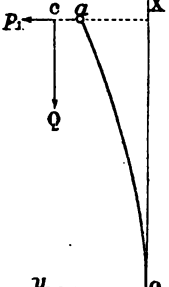


Fig. 27.

$$\mathrm{EI}_1 \frac{d^2y}{dx^2} = p_1 (h_1 - x) + \mathrm{Q} (e + \Delta - y);$$

d'où l'on déduit, en posant

$$m = \sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{EI}_1}},$$

les équations intégrales

$$\frac{p_1}{\mathrm{EI}_1} (h_1 - x) + m^2 (e + \Delta - y) = \mathrm{C}_1 \sin mx + \mathrm{C}_2 \cos mx,$$

$$- \frac{p_1}{\mathrm{EI}_1} - m^2 \frac{dy}{dx} = + \mathrm{C}_1 m \cos mx - \mathrm{C}_2 m \sin mx.$$

Pour éliminer les constantes arbitraires C_1 et C_2, nous avons les conditions suivantes :

Pour $x = 0$, $y = 0$; pour $x = h_1$, $y = \Delta$; et pour $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

Nous trouvons

$$\Delta = p_1 \frac{\operatorname{tang} mh_1 - mh_1}{\mathrm{EI}_1 m^3} + e \frac{1 - \cos mh_1}{\cos mh_1};$$

d'où

$$\frac{d\Delta}{dp_1} = \frac{\operatorname{tang} mh_1 - mh_1}{\mathrm{EI} m^3} = \text{const} = \frac{\delta_1}{p_1},$$

où δ_1 désigne la partie de la flèche totale Δ produite par la force horizontale p_1; ce qu'il fallait démontrer.

La quantite Q, dans l'expression

$$m = \sqrt{\frac{Q}{EI_1}},$$

désigne l'effort de compression d'un montant vertical correspondant à la répartition de la charge totale sur le pont entier. La quantité $\frac{p_1}{\delta_1}$ varie avec Q et I_1, et atteint sa valeur maxima (*) pour la section où m est minima, c'est-à-dire, dans le cas considéré, pour le montant c (*fig.* 26).

On aura, en représentant par pc, pc^2 le pouce linéaire et le pouce carré, par pd le poud :

$$Q = 66 \times 21 = 1386 \text{ pouds},$$
$$I_1 = 5{,}093\ pc^4,$$
$$E = 780000\ pd \text{ par } pc^2,$$
$$m = \sqrt{\frac{Q}{EI_1}} = 0{,}01868,$$
$$h_1 = 77\ pc,$$
$$\operatorname{tang} mh_1 = \operatorname{tang} 82^\circ 24' 43'' = 7{,}50659,$$
$$\delta_1 = p_1 \frac{\operatorname{tang} mh_1 - mh_1}{EI_1 m^3} = 182817 \frac{p_1}{E}.$$

Ensuite, en admettant qu'au lieu d'une console trapézoïdale, il y en ait une rectangulaire à base de $\frac{3+35}{2} = 19$ pouces,

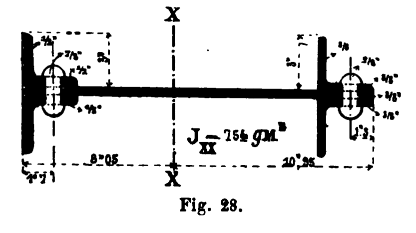


Fig. 28.

pour laquelle le moment d'inertie (*fig.* 28) par rapport

(*) Cela résulte du développement de tang mh_1 en série, d'où l'on déduit

$$\frac{\delta_1}{p_1} = \frac{1}{EI_1}\left(\frac{1}{3} h_1^3 + \frac{2}{3,5} h_1^5 m^2 + \frac{17}{3^2,5,7} h_1^7 m^4 + \dots\right).$$

Dans les limites de la convergence, cette quantité croît en même temps que m.

à l'axe XX sera $I_2 = 754$, nous trouverons :

$$h_1 \operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{p_1}{2\,EI_2} h_1 h_2 (2\,h_1 + h_2) = 408\,\frac{p_1}{E},$$

$$\delta_2 = \frac{p_1}{6\,EI_2} h_2^2 (3\,h_1 + 2\,h_2) = 116\,\frac{p_1}{E}.$$

Pour l'entretoise, enfin, nous avons

$$\left(h_1 + h_2 + \frac{1}{2} h_3\right) \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{p_1 D}{2\,EI_3} \left(h_1 + h_2 + \frac{1}{2} h_3\right)^2 = 1360\,\frac{p_1}{E}.$$

En substituant toutes ces valeurs dans l'équation (17), nous trouverons

$$q = \frac{780000}{84\,(182817 + 408 + 116 + 1360)} = 0{,}0502743\ (^*),$$

et

$$b^2 = \frac{0{,}0502743 \times 110^4 \times 12^4}{16 \times 780000 \times 155{,}917} = 78.$$

La valeur correspondante du coefficient de longueur μ, déterminée d'après la table du paragraphe 8, sera

$$\mu = 0{,}279,$$

et l'on aura

$$\frac{l}{r} = \frac{0.279 \times 110 \times 12}{2{,}637} = 140.$$

La valeur de la charge dangereuse correspondante sera, d'après la table du paragraphe 16,

$$\beta = 1.007^{kg} \text{ par centimètre carré.}$$

La valeur de la charge de compression par unité de surface dans la section représentée sur la *fig.* 29, sera d'ailleurs

$$N_1 = \frac{66 \times 110^2}{8 \times 22{,}429 \times 11{,}67} = 382^{pd} \text{ par pouce carré}$$
$$= 970^{kg} \text{ par centimètre carré,}$$

(*) On voit par cet exemple que les valeurs δ_2 et $h_1 \operatorname{tang} \varphi_1$ sont insignifiantes en comparaison de δ_1, et que, par conséquent, l'erreur commise par la substitution à la console trapézoïdale de la console rectangulaire ne peut avoir aucune influence sensible sur la valeur de q.

et dans la section affaiblie par les trous des rivets supplémentaires, aux nœuds du montant vertical,

$$N_2 = \frac{66 \times 110^2}{8 \times 21{,}116 \times 11{,}67} = 405^{pd} \text{ par pouce carré}$$
$$= 1.028^{kg} \text{ par centimètre carré.}$$

La (*fig.* 29) représente la section transversale et l'élé-

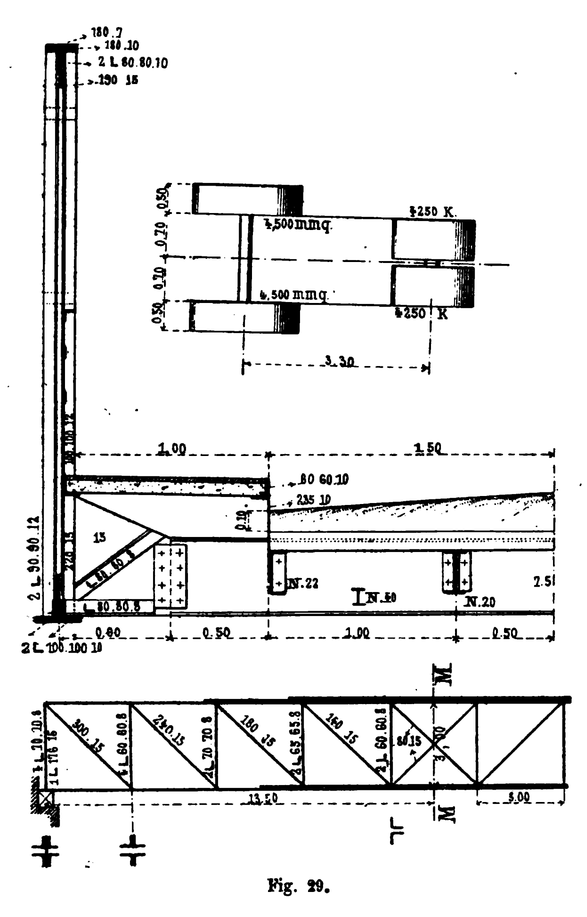


Fig. 29.

vation du pont en fer sur la rivière Niede, sur la route de Bockenheim à Nieder-Ursel, près de Francfort-sur-

le-Mein (*). Ce pont s'est effondré le 30 août 1892 au passage d'un rouleau compresseur pesant 20 tonnes. Le dégât fut occasionné par l'insuffisance de stabilité latérale du pont.

De la communication faite par M. Zweigle dans la *Frankfürter Bezirksverein* (**), nous tirons les données suivantes :

a) Poids de la construction métallique. . . .	$\frac{29.770}{2 \times 27} = 551^{kg}$	par mètre courant;
b) Poids de la chaussée, $350 \times 1{,}5$	$= 525$	—
c) Poids des trottoirs en ciment sur béton.	$= 140$	—
Total du poids permanent. .	1.216^{kg}	par mètre courant.

En ce qui concerne la surcharge mobile de 20 tonnes, le *Centralblatt* annonce qu'au moment de l'effondrement elle était placée sur les trois panneaux du milieu. En supposant, dans le cas le plus favorable, que la charge mobile, appliquée sur l'axe du pont, agissait également sur les deux poutres, et qu'elle était distribuée uniformément sur les trois panneaux du milieu, nous trouverons la valeur suivante pour une charge uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre, qui produirait le même moment fléchissant au milieu de la travée que la charge mobile

$$\left[5 \times 13{,}5 - \frac{10}{9} \times (4{,}5)^2 \times \frac{1}{2}\right] \frac{8}{(27)^2} \times 1.000 = 617^{kg} \text{ par m. cour.}$$

La charge totale d'une poutre sera donc $1216 + 617 = 1833$ kilogrammes par mètre courant.

En appliquant à ce cas la formule (17), nous pouvons négliger les quantités δ_2 et tang φ_1, qui se rapportent à la

(*) V. *Centralblatt der Bauverwaltung*, 1892, n° 39.

(**) Publié dans la *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 1893, n° 15.

déformation due à la console, et prendre en même temps pour h_1, la hauteur du montant vertical, comptée à partir du sommet de la console jusqu'à l'axe de la semelle supérieure ; on aura donc

$$h_1 = 300 - 60 = 240,$$
$$h_1 + h_2 + \frac{1}{2} h_3 = 240 + 20 + 20 = 280.$$

La valeur minima de $m^2 = \frac{Q}{\varepsilon I}$ correspond au troisième montant en comptant de l'appui ; la section transversale est représentée sur la figure 30.

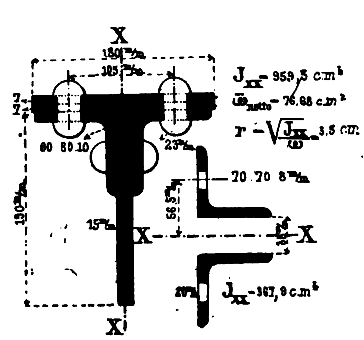


Fig. 30.

Nous avons :

$$Q = 1.833 \times 3 \times 2 = 16.998^{kg},$$
$$m = \sqrt{\frac{10.998}{2.000.000 \times 367,9}} = 0,003866,$$
$$m h_1 = 0,92784 = 53°\,9'\,41''.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (17) nous trouvons :

$$q = \frac{2.000.000}{300\left[\frac{\operatorname{tg} 53°\,9'\,41'' - 0,92784}{367,9\,(0,003866)^3} + \frac{260}{29.446}\,(280)^2\right]} = 0,33585,$$
$$h^2 = \frac{0,33585 \times 27^4 \times 100^4}{16 \times 2.000.000\;959,5} = 581.$$

D'après le tableau du paragraphe 8, nous trouvons la valeur du coefficient de longueur suivante

$$\mu = 0,21,$$

et par conséquent

$$\frac{l}{r} = \frac{0,21 \times 27 \times 100}{3,5} = 162;$$

la charge dangereuse, d'après la table du paragraphe 16, s'élève à

$$\beta = 752^{kg} \text{ par centimètre carré,}$$

tandis que la charge réelle dans la section représentée sur la *fig.* 32, sera

$$N = \frac{1.833 \times (27)^2}{3 \times 8 \times 76,68} = 726^{kg} \text{ par centimètre carré,}$$

Nous trouvons donc des résultats qui ne nous semblent pas être trop éloignés de la réalité.

Il serait très désirable que MM. les ingénieurs, qui ont à leur disposition des données sur des accidents plus ou moins anologues à ceux que nous venons de taiter, consentissent à y appliquer la méthode que nous venons de développer, quand ce ne serait que pour apprécier sa valeur pratique.

NOTE A.

BUT DE CETTE NOTE ; CAS *XIII* ET *XIV*. VÉRIFICATION DES FORMULES APPROXIMATIVES (11_2) et (12_2).

But de cette note. — Nous avons exposé dans les paragraphes 10 et 11 une méthode approximative pour la détermination du coefficient de longueur μ, relatif à des barres comprimées de poutres à treillis à ν intersections. Les suppositions que nous avons prises comme point de départ ne sont pas rigoureuses ; il serait donc utile de vérifier par une analyse plus exacte les résultats obtenus. Nous étudierons ici les conditions nécessaires pour qu'un flambement de treillis à une ou à deux intersections puisse se produire, et nous les comparerons aux conditions déterminées par notre méthode approximative.

Rappelons que la valeur de l'erreur commise par l'application de cette méthode augmente à mesure que le nombre d'intersections diminue et que, par conséquent sa valeur devient maxima pour des treillis à une intersection. De cette manière, nos recherches nous feront connaître la limite supérieure de l'erreur en question, ce qui nous permettra d'apprécier la valeur pratique de notre méthode approximative.

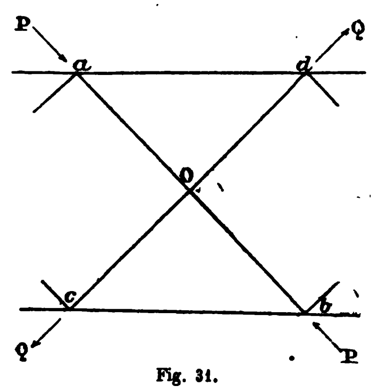


Fig. 31.

Cas XIII. — Supposons, que l'axe *ab* (*fig.* 31) d'une barre comprimée de longueur L, et l'axe *cd* d'une barre tendue de longueur L_1 s'entre-croisent en leurs milieux au point O. Admettons : 1° que le contact des axes au point d'intersection O se conserve pendant la déformation ; 2° que les extrémités *a*, *b*, *c* et *d* ne peuvent quitter le plan du treillis, et 3° qu'il y ait des articulations

parfaites au point O ainsi qu'à toutes les extrémités. Il s'agit de déterminer la valeur minima P_1 de l'effort de compression capable de produire un flambement du treillis. La réaction que la barre tendue *cd* oppose à la flexion de la barre comprimée *ab* est perpendiculaire au plan *abcd*, et proportionnelle à l'écart δ du point O de ce plan; elle pourra donc être exprimée par $2q\delta$, q désignant un coefficient constant. De même, les réactions que les semelles opposent à l'écartement des extrémités par rapport au *a* et *b* du plan *abcd* sont pendiculaires à ce plan et égales chacune à $-q\delta$.

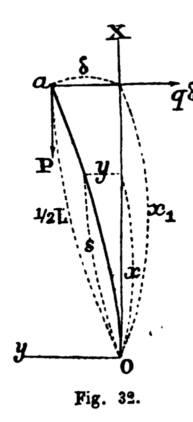


Fig. 32.

Considérons la moitié *ao* de la barre comprimée *a*, *b* et disposons les axes de coordonnées rectangulaires dans le plan de la flexion, comme l'indique la *fig.* 32. L'équation différentielle de l'axe fléchi *ao* sera

$$(a)\quad EI\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}} = P(\delta-y)-q\delta(x_1-x)$$

$$= P(\delta-y)-q\delta\int_s^{\frac{1}{2}L}\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds;$$

en faisant

$$(b)\qquad \frac{P}{EI}=a^2,\quad \frac{q}{EI}=b^2,$$

nous trouverons la valeur suivante de b^2, nécessaire pour que la flexion puisse se produire :

$$b^2=\lim.\left[\frac{a^2(\delta-y)-\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}}{\delta\int_s^{\frac{1}{2}L}\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds}\right]_{y=\text{const}=0}=\lim.\left[\frac{a^2(\delta-y)-\frac{d^2y}{ds^2}}{\delta\left(\frac{1}{2}L-s\right)}\right]_{y=\text{const}=0}$$

Pour déterminer la vraie valeur de cette expression, il faudra intégrer l'équation

$$(c)\qquad \frac{d^2y}{ds^2}=a^2(\delta-y)-h^2\delta\left(\frac{1}{2}L-s\right).$$

Son intégrale générale sera

(*d*) $a^2(\delta - y) - h^2\delta\left(\frac{1}{2}L - s\right) = C_1 \sin as + C_2 \cos as.$

Pour éliminer les constantes arbitraires C_1 et C_2, nous avons pour $S = 0$, $y = 0$ et $\frac{dy}{ds} = 0$; pour $S = \frac{1}{2}L$, $y = \delta$; donc

$$C_2 = -C_1 \operatorname{tang} \frac{1}{2}aL$$

$$C_1 = \frac{\frac{1}{2}h^2L - a^2}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}aL}\delta$$

$$b^2 = \frac{a^2}{\frac{1}{2}aL - \operatorname{tang}\frac{1}{2}aL},$$

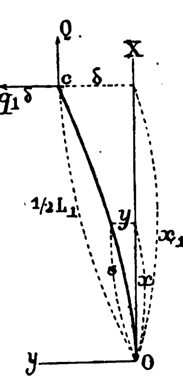


Fig. 33.

et à cause de (*b*)

$$(18) \qquad q = \frac{EIa^2}{\frac{1}{2}aL - \operatorname{tang}\frac{1}{2}aL}.$$

L'équation (18) donne la valeur du coefficient q nécessaire pour qu'une flexion de la barre comprimée puisse se produire. La valeur q_1 du même coefficient, nécessaire pour la flexion de la barre tendue cd, devra être déterminée d'après l'équation différentielle suivante (*fig.* 33) :

$$EI_1 \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}} = -Q(\delta - y) + q_1\delta\int_s^{\frac{1}{2}L_1}\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds.$$

En appelant

$$(e) \qquad \frac{Q}{EI_1} = m^2, \quad \frac{q_1}{EI_1}\, n^2,$$

nous trouverons

$$= \lim.\left[\frac{m^2(\delta - y) + \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}}{\delta\int_s^{\frac{1}{2}L_1}\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds}\right]_{y=\text{const}=0} = \lim.\left[\frac{m^2(\delta-y) + \frac{d^2y}{ds^2}}{\delta\left(\frac{1}{2}L_1 - s\right)}\right]_{y=\text{const}=0} = \frac{0}{0}.$$

Pour déterminer la vraie valeur de cette expression, il au intégrer l'équation

$$(f) \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = n^2\delta\left(\frac{1}{2}L_1 - s\right) - m^2(\delta - y).$$

L'intégrale générale sera

$$(g) \qquad n^2\delta\left(\frac{1}{2}L_1 - s\right) - m^2(\delta - y) = C_1e^{ms} + C_2e^{-ms}.$$

Pour éliminer C_1 et C_2, nous avons :

Pour $s = 0$, $y = 0$ et $\frac{dy}{ds} = 0$; pour $s = \frac{1}{2}L_1$, $y = \delta$;

donc

$$C_2 = -C_1e^{mL_1},$$

$$C_1 = \delta\frac{\frac{1}{2}n^2L_1 - m^2}{1 - e^{mL_1}},$$

$$n^2 = \frac{m^3}{\frac{1}{2}mL_1 - \frac{e^{m\delta_1} - 1}{e^{m\delta_1} + 1}} = \frac{m^3}{\frac{1}{2}mL_1 - \text{tang hyp}\,\frac{1}{2}mL_1},$$

et, en vertu de (e),

$$(19) \qquad q_1 = EI_1\frac{m^3}{\frac{1}{2}mL_1 - \text{tang hyp}\,\frac{1}{2}mL_1}.$$

Il est facile de voir que, pour $Q = 0$, la formule (19) se réduira à

$$(19_1) \qquad q_1 = 24\,\frac{EI_1}{L_1^3}.$$

Dans des cas particuliers, quand I_1 est très petit, on peut poser $I_1 = 0$ et l'équation (19) sera réduite à

$$(19_2) \qquad q_1 = \frac{2Q}{L_1}.$$

Si enfin la force Q agissait dans une direction opposée à celle que nous avons considérée, c'est-à-dire si elle produisait une

compression de la barre cd, on aurait (*):

$$(19_3) \qquad q_1 = \frac{m^3}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}mL_1 - \frac{1}{2}mL_1}.$$

Pour que le flambement du treillis puisse avoir lieu, il faudrait absolument que l'on eût

$$q \geqq q_1,$$

et, en vertu des équations (18), (19), (19_1), (19_2) et (19_3), l'effort dangereux P_1 pourra être obtenu respectivement par les relations suivantes :

$$I\frac{a^3}{\frac{1}{2}aL - \operatorname{tang}\frac{1}{2}aL} = \begin{cases} = I_1\dfrac{m^3}{\frac{1}{2}mL_1 - \operatorname{tang\,hyp}\frac{1}{2}mL_1} \\ = 24\dfrac{I_1}{L_1^3} \\ = 2\dfrac{Q}{EL_1} \\ = I_1\dfrac{m^3}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}mL_1 - \frac{1}{2}mL_1}. \end{cases}$$

En faisant $\frac{I_1}{I} = \gamma$, $\frac{L}{L_1} = h$, et en multipliant les deux membres de ces équations par $\frac{1}{y}\left(\frac{L}{2}\right)^3$, nous obtenons :

$$\frac{\left(\frac{1}{2}aL\right)^3}{\left(\frac{1}{2}aL\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}aL\right)} \begin{cases} = \dfrac{\gamma h^3\left(\frac{1}{2}mL_1\right)^3}{\left(\frac{1}{2}mL_1\right) - \operatorname{tg\,hyp}\left(\frac{1}{2}mL_1\right)} & (20) \\ = 3\gamma h^3, & (20_1) \\ = \dfrac{Qh\left(\frac{1}{2}L\right)^3}{EI} & (20_2) \\ = \dfrac{\gamma h^3\left(\frac{1}{2}mL_1\right)^3}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}mL_1\right) - \left(\frac{1}{2}mL_1\right)}. & (20_3) \end{cases}$$

(*) Ce qui est facile à déduire par une méthode analogue à celles qui ont été exposées plus haut.

Étant données les valeurs numériques des dimensions des barres et celle de la force Q, nous pouvons déterminer la quantité $\left(\frac{1}{2}\,a\mathrm{L}\right)$ d'après l'équation correspondante (20₃) au moyen d'approximations successives. Nous trouvons ainsi

$$\frac{1}{2}\,a\mathrm{L} = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\sqrt{\frac{\mathrm{P}_{13}}{\mathrm{EI}}} = \tau,$$

et

$$\mathrm{P}_{13} = 4\,\frac{\mathrm{EI}\tau^2}{\mathrm{L}^2}.$$

Le coefficient de longueur μ_{13} pourra être obtenu par l'équation

$$\frac{4\,\mathrm{EI}\tau^2}{\mathrm{L}^2} = \frac{\mathrm{EI}\pi^2}{(\mu_{13}l)^2},$$

d'où l'on déduit définivement

$$(21) \qquad \mu_{13} = \frac{\pi}{2\tau}.$$

Cas XIV. — Considérons une poutre à treilli dissymétriques, se composant de deux bandes parallèles (*fig.* 34) et de deux systèmes de barres inclinées différemment par rapport à la verticale, s'entre-croisant chacune en deux points intermédiaires qui divisent leurs longueurs en trois parties égales. Supposons que toutes les barres du premier système $a_{n-1}b_{n-1}$, a_nb_n, $a_{n+1}b_{n+2}$, ..., ayant la même longueur L, la même section ω, soient comprimées par des efforts égaux P, tandis que celles du second système $a_{n+3}b_n$, $a_{n+2}b_{n-1}$, $a_{n+1}b_{n-2}$,..., présentant la même longueur L_1 et une section uniforme ω_1, soient tendues par des efforts égaux Q. Admettons ensuite, comme dans les cas XI et XII : 1°) qu'il existe des articulations parfaites à tous les points d'intersections et aux extrémités des barres ; 2°) que les contacts de leurs axes aux points d'intersection soient

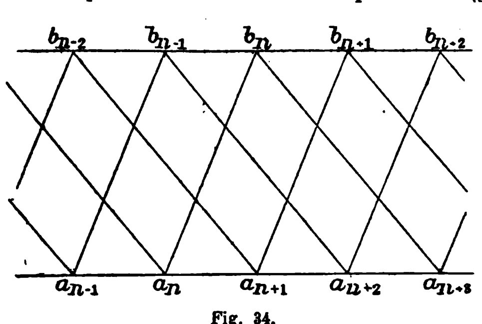


Fig. 34.

conservés pendant la déformation; 3°) que les extrémités des axes soient astreintes à demeurer dans le plan du treillis.

Les réactions opposées par les barres tendues à la flexion des barres comprimées sont proportionnelles à l'écartement des points d'intersection du plan du treillis. Toutes ces réactions seront égales par suite des conditions identiques dans lesquelles se trouvent toutes les barres de chaque système.

Le flambement qui peut se produire le plus facilement aura lieu quand les axes des barres de chaque système fléchiront d'après les mêmes courbes planes et symétriques, sans points d'inflexion. Plaçons le centre des coordonnées au milieu de l'axe d'une barre comprimée et dirigeons les axes des x et des y comme l'indique la *fig.* 35. Le demi-axe $b_n O_n$ sera sollicité par la réaction $q(\delta - \delta_1)$ d'une barre tendue, appliquée au point d'intersection, et à la réaction de la semelle $-q(\delta - \delta_1)$, appliquée à l'extrémité b_n; ces deux réactions étant égales, parallèles à l'axe des y et dirigées en sens opposés, forment un couple.

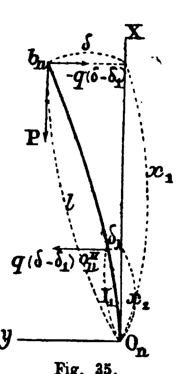


Fig. 35.

Faisons

$$(a) \qquad \frac{P}{EI} = a^2 \quad \text{et} \quad \frac{q}{EI} = b^2.$$

On sait que la valeur q', indispensable pour qu'une flexion de la barre comprimée puisse se produire, pourra être déterminée exactement des équations différentielles des courbes $b_n O_n^{II}$ et $O_n O_n^{II}$ suivantes :

$$\frac{d^2 y}{d s^2} = a^2(\delta - y) - b^2(\delta - \delta_1)(l - s),$$

$$\frac{d^2 y_2}{d s_1^2} = a^2(\delta - y_1) - b^2(\delta - \delta_1)(l - l_1).$$

Leurs intégrales générales seront :

$$(b) \quad a^2(\delta - y) - b^2(\delta - \delta_1)(l - s) = C_1 \sin as + C_2 \cos as;$$

$$(b_1) \quad a^2(\delta - y_1) - b^2(\delta - \delta_1)(l - l_1) = C_3 \sin as_1 + C_4 \cos as_1.$$

Nous avons d'ailleurs

pour $s = l$, $y = \delta$; pour $S = l_1$, $y = \delta_1$;

donc

$$C_2 = -C_1 \operatorname{tg} a l,$$
$$C_1 = (\delta - \delta_1) \frac{a^2 - b^2(l - l_1)}{\sin a l_1 - \operatorname{tg} a l \cos a l_1}.$$

En faisant

$$(a_1) \qquad \left(\frac{dy}{ds}\right)_{s=l_1} = \nu, \qquad \frac{\delta_1}{\delta} = k \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{a^2} = c^2,$$

nous trouvons, par la différentiation de (b),

$$(c) \qquad \frac{\nu}{\delta} = (1-k)\left[c^2 + a\frac{1 - c^2(l - l_1)}{\operatorname{tg} a(l - l_1)}\right].$$

De même pour éliminer C_3 et C_4, nous avons

$$\text{pour} \quad s_1 = 0, \quad y_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy_1}{ds_1} = 0;$$

donc

$$C^3 = 0 \quad \text{et} \quad C_4 = a^2\delta - b^2(\delta - \delta_1)(l - l_1).$$

Or, il est évident que

$$\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)_{s_1=l_1} = \left(\frac{dy}{ds}\right)_{s=l_1} = \nu,$$

d'où

$$(c_1) \qquad \frac{\nu}{\delta} = a[1 - c^2(1-k)(l - l_1)] \sin a l_1.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\text{pour} \quad s_1 = l_1, \quad y_1 = \delta_1,$$

et par suite

$$(d) \qquad (1-k) = \frac{\cos a l_1}{1 - c^2(l - l_1)(1 - \cos a l_1)}.$$

Des équations (c) et (c_1), nous tirons

$$(d_1) \quad (1-k) = \frac{a \sin a l_1}{c^2 + a\dfrac{1 - c^2(l - l_1)}{\operatorname{tg} a(l - l_1)} + a c^2(l - l_1)\sin a l_1}.$$

En éliminant $(1-k)$ des équations (d) et (d_1) et en les résol-

vant par rapport à c^2, nous obtenons

$$c^2 = \frac{a}{a(l-l_1) - \dfrac{\operatorname{tg} a(l-l_1)}{1 - \operatorname{tg} a l_1 \operatorname{tg} a(l-l_1)}},$$

et, par suite des équations (a) et (a_1),

$$q' = \mathrm{EI} \frac{a^3}{a(l-l_1) - \dfrac{\operatorname{tg} a(l-l_1)}{1 - \operatorname{tg} a l_1 \operatorname{tg} a(l-l_1)}},$$

et pour

$$l_1 = \frac{1}{3} l = \frac{1}{6} \mathrm{L};$$

nous obtenons définitivement

$$(22) \qquad q' = \frac{1}{2} \mathrm{EI} \frac{a^3}{\dfrac{1}{6} a\mathrm{L} - \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{6} a\mathrm{L}}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{6} a\mathrm{L}}}.$$

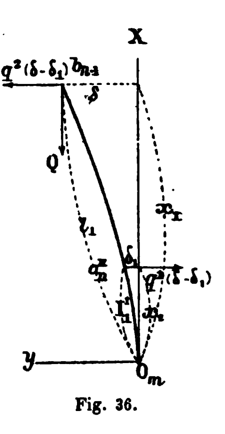


Fig. 36.

La valeur q_1, nécessaire pour que la flexion d'une barre puisse avoir lieu, pourra être obtenue d'une manière analogue, en considérant le demi-axe d'une barre tendue (*fig.* 36). En faisant

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{EI}_1} = m^2, \quad \frac{q_1}{\mathrm{EI}_1} = n^2 \quad \text{et} \quad \frac{\delta_1}{\delta} = \mathrm{K},$$

nous trouverons facilement

$$(23) \qquad q'_1 = \mathrm{EI}_1 \frac{m^2}{\dfrac{2}{6} m\mathrm{L}_1 - \dfrac{\operatorname{tg\,hyp} \frac{2}{6} m\mathrm{L}_1}{1 + \operatorname{tg\,hyp} \frac{2}{6} m\mathrm{L}_1 \operatorname{tg\,hyp} \frac{1}{6} m\mathrm{L}_1}} \text{ (*)}.$$

Il est facile à voir que pour $\mathrm{Q} = 0$, l'équation (23) se réduit à

$$(23_1) \qquad q'_1 = 32{,}4 \frac{\mathrm{EI}_1}{\mathrm{L}_1^2}.$$

(*) Nous ne donnons pas ici la déduction de ces formules, qui s'effectue d'une manière tout à fait analogue à celle de la formule (22).

Dans le cas où I_1 serait assez petit pour qu'on puisse poser $I_1 = 0$, l'équation (23) donnera simplement

$$q'_1 = 3\,\frac{Q}{L_1}. \tag{23$_2$}$$

Si enfin Q agissait dans une direction opposée à celle qu'il avait dans le cas considéré, c'est-à-dire si, au lieu d'une tension, il produisait une compression de la barre $b_{n-1}O_n$, nous aurions

$$q'_1 = \frac{1}{2}\,EI_1\,\frac{m^3}{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{6}\,mL_1}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{1}{6}\,mL_1}-\frac{1}{6}\,mL_1}. \tag{23$_3$}$$

Pour que le flambement du treillis puisse avoir lieu, il faut nécessairement que l'on ait

$$q' \geqq q'_1,$$

et d'après les équations (22), (23), (23$_1$), (23$_2$) et (23$_3$), l'effort dangereux P_{14} pourra être tiré de l'une des équations suivantes :

$$\frac{\frac{1}{2}\,Ia^3}{\frac{1}{6}\,aL-\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{6}\,aL}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{1}{6}\,aL}}\left\{\begin{aligned}
&=\frac{I_1m^3}{\frac{2}{6}\,mL_1-\dfrac{\operatorname{tg\,hyp}\frac{2}{6}\,mL_1}{1+\operatorname{tg\,hyp}\frac{2}{6}\,mL_1\operatorname{tg\,hyp}\frac{1}{6}\,mL_1}}\\
&=32{,}4\,\frac{I_1}{L_1^3}\\
&=3\,\frac{Q}{EL_1}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\,I_1m^3}{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{6}\,mL_1}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{1}{6}\,mL_1}-\frac{1}{6}\,mL_1}.
\end{aligned}\right.$$

En faisant $\frac{I_1}{I} = \gamma$, $\frac{L}{L_1} = h$, et en multipliant ces équations par $2\,\frac{\left(\frac{1}{6}\,L\right)^3}{I}$, nous obtiendrons la relation

$$\frac{\left(\frac{1}{6}aL\right)^3}{L-\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{6}aL}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{1}{6}aL}}\left\{\begin{array}{ll}=2\gamma h^3\dfrac{\left(\frac{1}{6}mL_1\right)^3}{\frac{2}{6}mL_1-\dfrac{\operatorname{tg\,hyp}\frac{2}{6}mL_1}{1+\operatorname{tg\,hyp}\frac{2}{6}mL_1\operatorname{tg\,hyp}\frac{1}{6}mL_1}} & (24)\\ =0{,}3\gamma h^3 & (24_1)\\ =\dfrac{L^2hQ}{36EI} & (24^2)\\ =\gamma h^3\dfrac{\left(\frac{1}{6}mL_1\right)^3}{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{6}mL_1}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{1}{6}mL_1}-\frac{1}{6}mL_1}. & (24_3)\end{array}\right.$$

Étant données les valeurs numériques des dimensions des barres et de la force Q, nous pouvons déterminer $\left(\frac{1}{6}aL\right)$ d'après une des équations (24_{12}). Supposons qu'on ait trouvé ainsi

$$\frac{1}{6}aL=\frac{1}{6}L\sqrt{\frac{P_{14}}{EI}}=\tau.$$

Il en résulte que le coefficient de longueur μ_{14} sera

$$\mu_{14}=\frac{\pi}{6\tau}.$$

Vérification des formules approximatives (11_2) et (12_2). — On ne saurait se servir dans l'application des formules des cas XIII et XIV, à cause de leur forme transcendante et compliquée. Nous les avons déduites pour pouvoir déterminer la limite de l'erreur que l'on commettrait en se servant des formules (11^2) et (12_2). Il a été dit antérieurement que cette limite atteint sa plus grande valeur pour les treillis à une intersection; supposons que nous avons obtenu pour μ d'un pareil treillis deux valeurs différentes : μ_{13}, d'après la formule exacte (21), et μ_{11}, d'après la formule approximative (11_2). On pourra poser l'équation

$$\mu_{13}=(1+\lambda)\mu_{11},$$

où λ désigne l'erreur relative.

Il arrive rarement dans les constructions que I_1 soit plus

grand que I et que l'effort de tension Q soit plus grand que l'effort de compression U, c'est-à-dire que la $n^{ième}$ partie de l'effort dangereux P_{11}, où n n'est jamais plus petit que 3,4. Des limites extrêmes de λ auront lieu

$$\text{quand} \quad 0 \leq I_1 \leq 1\frac{1}{2} I,$$

et

$$\text{quand} \quad 0 \leq Q \leq \frac{1}{2} P_{11}.$$

Les formules (20_2) nous montrent que, dans les limites indiquées ci-dessus, l'erreur λ, pour Q constant, croît en valeur absolue quand I_1 diminue, et atteint sa plus grande valeur pour $I_1 = 0$; pour $I_1 = 0$, λ croît en même temps que Q; il atteint donc sa plus grande valeur possible pour $Q = \frac{P_{11}}{2}$. En substituant dans les formules (20_2), (21) et (11_2) $I_1 = 0$, nous obtenons:

$$\text{Pour } Q = \frac{1}{4} P_{11} \ldots\ldots\ldots \lambda = 0{,}025;$$

$$Q = \frac{1}{3} P_{11} \ldots\ldots\ldots \lambda = 0{,}034;$$

$$Q = \frac{1}{2} P_{11} \ldots\ldots\ldots \lambda = 0{,}054.$$

De même, pour un treillis à deux intersections, nous obtenons, d'après les équations (22), (24) et (11_2):

$$\text{Pour } Q = \frac{1}{4} P_{11} \ldots\ldots\ldots \lambda = 0{,}01;$$

$$Q = \frac{1}{3} P_{11} \ldots\ldots\ldots \lambda = 0{,}015;$$

$$Q = \frac{1}{2} P_{11} \ldots\ldots\ldots \lambda = 0{,}02.$$

Pour un treillis au nombre supérieur d'intersections, λ sera encore plus petit.

On voit donc que la valeur de λ est négligeable au point de vue pratique, et qu'on peut appliquer la formule (11_2) à tout treillis symétrique, sans risquer d'erreur sensible.

Prenons, comme exemple, deux treillis symétriques à une et à deux intersections, en supposant $L = L_1$, $I = I_1$ et $Q = 0$.

En appliquant la formule (11_2) nous obtenons pour les deux treillis la même valeur du coefficient de longueur

$$\mu'_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071.$$

Les formules exactes nous donnent :

a) Pour les treillis à une intersection, d'après l'équation (20),

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\,a\mathrm{L}\right)^3}{\frac{1}{2}\,a\mathrm{L} - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\,a\mathrm{L}} = 3;$$

d'où l'on déduit, par approximations successives,

$$a\mathrm{L} = 2\,\tau = 4,4072,$$

et, d'après l'équation (21),

$$\mu'_{13} = \frac{\pi}{2\,\tau} = 0,7128;$$

donc, l'erreur qu'on commet, en appliquant l'équation (11_2), sera

$$\lambda = \frac{0,7128 - 0,7071}{0,7128} = 0,008;$$

b) Pour les treillis à deux intersections, nous avons, d'après l'équation (24_1),

$$\frac{\left(\frac{1}{6}\,a\mathrm{L}\right)^3}{\frac{1}{6}\,a\mathrm{L} - \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{6}\,a\mathrm{L}}{1 - 3\operatorname{tang}^2\left(\frac{1}{6}\,a\mathrm{L}\right)}} = 0,3;$$

d'où résulte

$$a\mathrm{L} = 6\,\tau = 4,4382,$$

et d'après l'équation (25)

$$\mu'_{14} = \frac{\pi}{6\,\tau} = 0,7079;$$

l'erreur correspondante est

$$\lambda_1 = \frac{0,7079 - 0,7071}{0,7079} = 0,001.$$

NOTE B

INFLUENCE DE LA COURBURE ACCIDENTELLE DE L'AXE PRIMITIF DES PIÈCES COMPRIMÉES ET DE L'EXCENTRICITÉ DES EFFORTS.

La légère courbure fortuite de l'axe primitif des pièces comprimées comporte une certaine limite, qui dépend de la précision du travail de la construction.

Le cas le plus défavorable a lieu quand l'axe primitif de la pièce est courbé, sans point d'inflexion, dans le plan perpendiculaire à l'axe du plus petit moment d'inertie. On pourra évaluer la limite de cette déviation par le rapport $m = \frac{L}{r}$ entre la longueur L de l'axe et le rayon maximum r d'un arc de cercle qui passe par les extrémités a et b et dont le segment ab renferme toute la courbe de l'axe primitif.

Fig. 37.

Prenons le cas le moins favorable, savoir, celui de l'axe primitif aOb, coïncidant avec l'arc du cercle-limite, et où les efforts de compression P et —P sont appliqués à une certaine distance e des extrémités a et b, du côté du centre de ce cercle. En disposant les axes des coordonnées comme l'indique la *fig.* 37, nous aurons l'équation suivante de l'axe fléchi $a_1 O b_1$:

$$EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) = P(e + \Delta - y).$$

Ne considérant que le cas où $\frac{l}{r}$ et e sont petits, et en nous bornant à l'examen des petites déformations produites par les efforts P, qui ne dépassent jamais un tiers de l'effort dangereux, nous pourrons négliger la fonction de $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \sin^2\alpha$ par rapport à l'unité. Nous avons ainsi l'équation différentielle

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{r} + \frac{P}{EI}(e + \Delta - y) = \frac{m}{L} + a^2(e + \Delta - y).$$

L'intégrale générale est

$$y = \frac{m}{a^2 L} + e + \Delta + C_1 \sin as + C_2 \cos as.$$

On a d'ailleurs

$$\text{pour } s = 0,\ y = 0 \text{ et } \frac{dy}{ds} = 0; \quad \text{pour } s = \frac{1}{2} L,\ y = \Delta.$$

Il en résulte

$$C_2 = -\left(\frac{m}{a^2 L} + e + \Delta\right),$$

$$C_1 = 0,$$

$$(a) \qquad \Delta = \left(\frac{m}{a^2 L} + e\right) \frac{1 - \cos \frac{1}{2} a L}{\cos \frac{1}{2} a L}.$$

Le moment fléchissant maximum correspond à la section O, et a pour valeur

$$(b) \qquad M_0 = P(e + \Delta) = \frac{P}{\cos \frac{1}{2} a L}\left[e + \frac{m}{a^2 L}\left(1 - \cos \frac{1}{2} a L\right)\right].$$

Par suite de la flexion, l'effort de compression ne peut être réparti uniformément sur toute la section 0, et la plus grande valeur de la charge qu'il produit par unité de surface dans les fibres extrêmes du côté concave, est

$$N_{max} = \frac{P}{\omega} + \frac{M v_0}{I} = \frac{P}{\omega} + \frac{v_0}{I} \frac{P}{\cos \frac{1}{2} a L}\left[e + \frac{m}{a^2 L}\left(1 - \cos \frac{1}{2} a L\right)\right],$$

v_0 désignant la distance de ces fibres au centre de gravité de la section.

Si l'on pose

$$P = \omega R_1,$$

$$I = \omega r^2,$$

$$a = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{R_1}{E}},$$

on arrive définitivement à l'équation

$$(26) \qquad N_{max} = R_1 + \frac{v_0}{r} \cdot \frac{R_1}{\cos\left(\frac{1}{2} \frac{L}{r} \sqrt{\frac{R_1}{E}}\right)} \left\{\frac{e}{r} + \frac{E m}{R_1} \cdot \frac{r}{L}\left[1 - \cos\left(\frac{1}{2} \frac{\alpha}{r} \sqrt{\frac{R_1}{E}}\right)\right]\right\}.$$

8

Cette analyse nous mène aux conclusions suivantes :

1° Les formules (*a*), (*b*) et (26), obtenues en négligeant $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$ devant l'unité, ne sont applicables que dans le cas où Δ est petit. Les valeurs considérables des flèches, qui seraient contradictoires à cette supposition, ne peuvent pas être déterminées d'après la formule (*a*); néanmoins, on voit que l'effort qui satisfait à la condition $al = \pi$, quoiqu'il ne donne pas des valeurs infinies pour M, N et Δ, comme cela résulterait des équations (*a*), (*b*) et (26), produit quand même des flèches et des fatigues considérables et peut occasionner l'effondrement de la pièce. Par conséquent, *la charge exprimée par l'équation* (2_1), (*la limite d'élasticité n'étant point dépassée*) *doit être considérée comme une limite dangereuse, même dans le cas où il existerait une excentricité de l'effort de compression. La condition de sécurité qui exige, dans le cas principal, que la charge de compression ne dépasse pas la* $n^{\text{ième}}$ *partie de la charge dangereuse* (2_1), *doit être de même observée dans le cas considéré; mais, dans le premier cas, cette condition est nécessaire et suffisante, tandis que, dans le dernier cas, elle n'est que nécessaire.*

Cette conclusion peut être étendue aux équations empiriques applicables en dehors de la limite d'élasticité;

2° La formule (26) indique que l'effort qui s'exerce par unité de surface aux points les plus éloignés de la section dangereuse, dépasse la charge moyenne apparente $R_1 = \frac{P}{\omega}$ de la quantité

$$D = N_{max} - R_1$$
$$= \frac{v_0}{r}\,\frac{R_1}{\cos\left(\frac{1}{2}\frac{L}{r}\sqrt{\frac{R_1}{E}}\right)}\left\{\frac{e}{r} + \frac{Em}{R_1}\frac{r}{L}\left[1 - \cos\left(\frac{1}{2}\frac{L}{r}\sqrt{\frac{R_1}{E}}\right)\right]\right\}.$$

On voit que m, $\frac{e}{r}$, $\frac{L}{r}$, E et R_1 étant constants, la fatigue supplémentaire D sera proportionnelle au rapport $\frac{v_0}{r}$. Il en résulte *que la loi selon laquelle la résistance des pièces comprimées ne dépend que du rapport* $\frac{L}{r}$, *n'est exacte que dans le cas où l'effort de compression coïncide parfaitement avec l'axe primitif, absolument droit. Si, au contraire, ce dernier est affecté d'une légère courbure, et s'il existe une certaine excentricité de l'effort, ce qui est inévitable dans les constructions, la pièce subira une flexion,*

outre la simple compression. Le travail supplémentaire des fibres les plus éloignées, toutes autres conditions étant égales, croît proportionnellement au rapport $\frac{v_0}{r}$, *et par conséquent la résistance des pièces à égales valeurs du rapport* $\frac{L}{r}$, *décroît à mesure que* $\frac{v_0}{r}$ *augmente. Il faut donc, dans l'étude des pièces destinées à être comprimées, faire attention à ce que le rapport* $\frac{v_0}{r}$ *soit aussi petit que possible.*

L'anneau circulaire présente, à ce point de vue, la forme la plus avantageuse pour la section transversale, lorsque la pièce doit opposer à la flexion la même résistance dans toutes les directions. Le rapport $\frac{v_0}{r}$ correspondant sera

$$\frac{v_0}{r} = \frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{D}\right)^2}}.$$

Pour une section circulaire $\frac{v_0}{r} = 2$.

Pour un carré creux

$$\left(\frac{v_0}{r}\right)_{max} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{A}\right)^2}},$$

$$\left(\frac{v_0}{r}\right)_{min} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{A}\right)^2}},$$

a désignant le côté du carré intérieur et A celui du carré extérieur. La première expression se rapporte à la flexion dans un plan parallèle à la diagonale du carré ; la seconde à la flexion dans un plan parallèle à son côté. Pour un carré plein, nous avons de même

$$\left(\frac{v_0}{r}\right)_{max} = \sqrt{6} \quad \text{et} \quad \left(\frac{v_0}{r}\right)_{min} = \sqrt{3}.$$

En général, $\frac{v_0}{r}$ ne dépasse pas 2,75 ; néanmoins, on rencontre souvent des semelles de poutres de ponts pour lesquelles $\frac{v_0}{r}$, cor-

respondant à la flexion latérale, est supérieure à 3. Cette circonstance si désavantageuse provient de ce qu'on n'a pas fait le nécessaire à ce sujet;

3° Il faut, pour assurer la résistance des pièces comprimées, que non seulement la charge moyenne $R_1 = \frac{P}{\omega}$ ne dépasse pas la $n^{ième}$ partie de la charge dangereuse, mais que l'effort maximum N_{max} (26), qui s'exerce par unité de surface sur les fibres les plus fatiguées par suite de défauts inévitables de construction, reste inférieur à la charge de sécurité admissible pour la simple compression R. Il est facile de prouver que, si la première de ces conditions est satisfaite dans les limites d'application de la formule d'Euler, c'est-à-dire si

$$R_1 \leq \frac{1}{n} E\pi^2 \left(\frac{r}{l}\right)^2,$$

la seconde le sera à plus forte raison. En effet, en substituant dans l'équation (26)

$$L = l; \quad N_{max} = R = \frac{I}{n} \quad \text{et} \quad R_1 = \frac{\beta}{n} = \frac{1}{n} E\pi^2 \left(\frac{r}{l}\right)^2,$$

nous aurons

$$T = E\pi^2 \left(\frac{r}{l}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{v_0}{r} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}\right)} \left[\frac{l}{r} + \frac{mn}{\pi^2 \left(\frac{r}{l}\right)^2} \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}\right) \right] \right\}.$$

La racine positive de cette équation sera

$$(a) \quad \left(\frac{l}{r}\right)_1 = \frac{E}{T}\frac{v_0}{r}\frac{mn}{2} \frac{1 - \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}} + \sqrt{\left(\frac{E}{T}\frac{v_0}{r}\frac{mn}{2}\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}}\right)^2 + \frac{E\pi^2}{T}\left(1 + \frac{v_0}{r}\cdot\frac{e}{r\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}}\right)}$$

Cette racine est la valeur limite de $\left(\frac{l}{r}\right)$, pour laquelle $N = R$; toutes les valeurs de $\frac{l}{r}$ supérieures à cette racine donnent $N < R$.

La valeur $\left(\frac{l}{r}\right)$, d'après la formule (a), croît en même temps que les valeurs m, $\frac{e}{r}$, $\frac{v_0}{r}$ et $\frac{1}{n}$. La plus grande valeur admissible de m est 0,008, ce qui correspond à peu près à une flèche primitive $f = 0{,}001\ l$. L'excentricité inévitable ne dépasse pas $e = 0{,}5\,r$; nous prendrons ici $e = 0{,}1\ r$. Le coefficient admissible de sécurité dans les construction métalliques n'est jamais inférieur à $n = 3{,}4$, et enfin $\left(\frac{v_0}{r}\right)_{max} = 2{,}75$: nous prendrons ici $\frac{v_0}{r} = 3$.

Après avoir substitué toutes ces valeurs maxima dans la formule (a), nous trouvons

$$\left(\frac{l}{r}\right)_1 = 0{,}0245\,\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{T}} + \sqrt{\left(0{,}02115\,\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{T}}\right)^2 + 14{,}37764\,\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{T}}}.$$

Pour le fer fondu $\mathrm{E} = 2156$ tonnes par centimètre carré;
$\mathrm{T}_{min} = 3{,}4$ tonnes par centimètre carré.

Par conséquent

$$\left(\frac{l}{r}\right)_1 = 109{,}8.$$

Pour le fer soudé $\mathrm{E} = 2000$ on a $\mathrm{T} = 3{,}1$; par conséquent

$$\left(\frac{l}{r}\right)_1 = 110{,}9.$$

Or, on sait d'ailleurs que la formule d'Euler n'est applicable au fer fondu que pour $\frac{l}{r} \geqq 110$, et au fer soudé que pour $\frac{l}{r} \geqq 115$.

Si, par conséquent, la charge moyenne par unité de surface $\frac{\mathrm{P}}{\omega}$ *d'une pièce comprimée en fer ou en acier doux, ne dépasse pas la* $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ *partie de la charge dangereuse, déterminée pour* $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{r}} >$ 110 *pour le fer fondu*, 115 *pour le fer soudé*, *d'après la formule d'Euler* $\beta = \mathrm{E}\pi^2\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{l}}\right)^2$, *l'effort maximum qui peut s'exercer par unité de surface sur les fibres les plus fatiguées, par suite de défauts inévitables de construction* $\left(\textit{pour } \mathrm{m} < 0{,}008 \textit{ et } \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{r}} < 0{,}1\right)$, *sera tou-*

jours inférieure à la charge de sécurité, admissible pour la simple compression $R = \frac{T_{min}}{n}$ *(ou pour le fer fondu* $T_{min} = 3{,}4$ *tonnes par centimètre carré, et pour le fer soudé* $T_{min} = 3{,}1$).

Nous arrivons à cette importante conclusion, que la résistance des pièces comprimées peut être déterminée d'après la formule d'Euler, dans les limites correspondantes, non seulement dans le cas idéal où les axes des pièces comprimées sont rigoureusement rectilignes et où les efforts sont appliqués sans la moindre excentricité, mais aussi en présence d'une légère courbure des axes et d'une petite excentricité des forces;

4° L'influence des défauts indiqués de construction pour des pièces comprimées pour lesquelles $\frac{l}{r} < \begin{matrix} 110 \text{ pour le fer fondu} \\ 115 \text{ pour le fer soudé} \end{matrix}$, peut être déterminée d'après la formule (26) en y faisant $\beta = \frac{n}{1}\left(a - b\,\frac{r}{l}\right)$, où les valeurs correspondantes de a et b sont données au chapitre II, paragraphe 16.

Pour

$$T_{min} = \begin{cases} 3^{ton},4 \text{ par centimètre carré pour le fer fondu,} \\ 3^{ton},1 \quad — \quad — \quad \text{soudé;} \end{cases}$$

$$R = \frac{T_{min}}{n} = \begin{cases} 1.000^{kg} \text{ par centimètre carré pour le fer fondu,} \\ 912^{kg} \quad — \quad — \quad \text{soudé;} \end{cases}$$

nous trouverons les valeurs de N_{max} en kilogrammes par centimètre carré.

a) **Pour le fer fondu.**

	$\frac{r_0}{r} =$ 2,75	2,50	2,25	2,00	1,75	1,50
$\frac{l}{r} =$ 20	1.087	1.072	1.055	1.039	1.022	1.006
30	1.064	1.046	1.028	1.010	992	»
40	1.040	1.020	1.001	881	»	»
50	1.016	995	»	»	»	»
58	997	»	»	»	»	»

b) **Pour le fer soudé.**

		$\frac{v_0}{r} =$					
		2,75	2,50	2,25	2,00	1,75	1,50
$\frac{l}{r} =$	20	1.077	1.061	1.045	1.029	1.013	997
	30	1.048	1.030	1.012	995	977	959
	40	1.018	999	979	959	940	920
	50	987	966	945	924	903	»
	60	956	933	910	»	»	»
	70	922	898	»	»	»	»
	73	912	»	»	»	»	»

Dans ces tableaux, on a laissé pour les valeurs de $N < R$, les cases inoccupées. Ces tableaux nous montrent que, *si la charge moyenne* $\frac{P}{\omega}$ *ne dépasse pas la* $n^{ième}$ *partie de la charge dangereuse déterminée par l'équation* $\beta = a - b\,\frac{l}{r}$, *l'effort maximum* N, *qui peut s'exercer par unité de surface sur les fibres les plus fatiguées par suite de défauts inévitables de la construction* $\left(\textit{supposant } m < 0{,}008 \textit{ et } \frac{e}{r} < 0{,}05\right)$, *quand on a*

$$110 > \frac{l}{r} > 758 \text{ pour le fer fondu,}$$

$$115 > \frac{l}{r} > 773 \quad — \quad \text{soudé,}$$

sera toujours moindre que la charge de sécurité $R = \frac{T_{min}}{n}$;

Quand

$$\frac{l}{r} < \begin{matrix} 58 \text{ pour le fer fondu,} \\ 73 \quad — \quad \text{soudé,} \end{matrix}$$

N_{max} *peut dépasser* R, *mais de quantités inférieures à*

$$(N_{max} - R) < \begin{matrix} 87^{kg} \text{ par centim. carré } (= 0{,}087R) \text{ pour le fer fondu,} \\ 167^{kg} \quad — \quad (= 0{,}183R) \quad — \quad \text{soudé.} \end{matrix}$$

Ces excédents nous paraissent négligeables, parce qu'ils correspondent à l'ensemble des conditions les plus défavorables.

NOTE C

EFFET DE LA DISPOSITION EXCENTRIQUE DES DIAGONALES DES POUTRES A TREILLIS SYMÉTRIQUES.

Nous avons donné au paragraphe 10 le coefficient de longueur pour la résistance au flambement latéral des barres comprimées des treillis symétriques. Nous avons supposé que les axes des barres sont dans le plan du treillis qui passe par les axes des bandes. Dans la plupart des poutres ayant une âme simple, toutes les diagonales tendues sont placées d'un même côté du plan du treillis et les barres comprimées sont placées de l'autre côté. Par suite de ce genre de construction, les efforts longitudinaux que subissent les diagonales sont appliqués avec excentricité, ce qui entraîne une flexion latérale.

Nous essaierons de déterminer les efforts supplémentaires qui s'exercent sur les barres comprimées à cause de cette flexion.

Considérons, comme au cas XI, la poutre à treillis symétrique (*fig.* 38), mais en supposant que les barres tendues soient placées d'un côté du plan du treillis, tandis que les barres comprimées soient placées de l'autre côté. Toutes les diagonales de chacun de ces systèmes, ayant des dimensions égales et se trouvant dans les mêmes conditions, fléchissent sous l'action des efforts égaux appliqués avec des excentricités égales d'après les mêmes courbes planes et symétriques sans point d'inflexion. En négligeant l'allongement des diagonales tendues et la contraction des

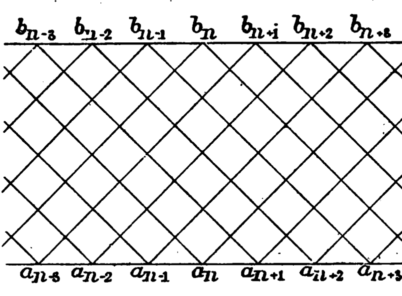


Fig. 38.

diagonales comprimées, nous trouverons, comme au cas XI, que les ν points d'intersection et les deux extrémités de l'axe de chaque diagonale comprimée, ainsi que les $\nu + 2$ points correspondants de l'axe de chaque diagonale tendue, sont disposés d'une manière absolument identique par rapport aux axes droits primitifs. En ne considérant que de petites déformations, nous trouverons de même que tous les autres points correspondants de ces deux axes ne peuvent pas être placés, par rapport aux axes primitifs, d'une manière sensiblement différente. Nous pouvons donc admettre que ces deux axes fléchissent d'après des courbes absolument identiques et qu'en même temps les actions et les réactions réciproques des diagonales, au lieu d'être appliquées aux points d'intersection, sont réparties d'une manière continue sur tout l'axe à raison de $f(s)$ par unité de longueur.

Aux extrémités des diagonales, outre les réactions des semelles, agissent encore dans le plan du treillis des couples à moments égaux et opposés, M_0 et $-M_0$. Ces couples réciproques résultent

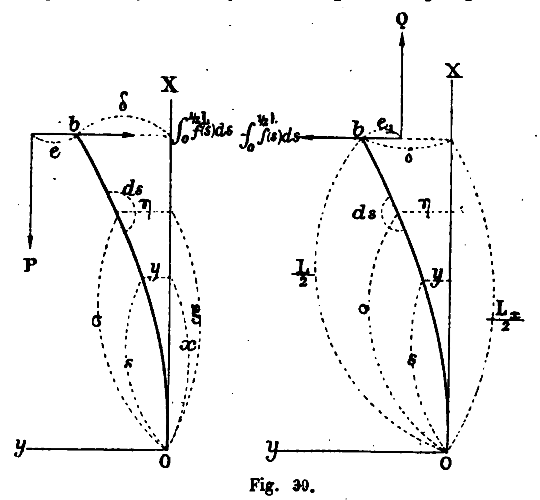


Fig. 39.

de ce que l'extrémité de la diagonale tendue est soumise à un moment fléchissant différant de celui qui agit sur l'extrémité de la diagonale comprimée.

Soit Ob, sur la première partie de la *fig.* 39, le demi-axe fléchi d'une diagonale comprimée, et Ob, sur la seconde partie, celui d'une diagonale tendue. Désignons par P, Q, e et e_1 les

valeurs absolues des efforts et des excentricités. Les efforts étant dirigés comme l'indique la *fig.* 39, nous aurons les équations suivantes des axes fléchis :

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{ds^2} = \mathrm{M}_0 + \mathrm{P}(e+\delta-y) - \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}_x - x\right)\int_0^{\frac{\mathrm{L}}{2}} f(s)\,ds + \int_s^{\frac{\mathrm{L}}{2}}(\xi - x) f(\sigma)\,d\sigma,$$

$$\mathrm{EI}_1\frac{d^2y}{ds^2} = -\mathrm{M}_0 - \mathrm{Q}(\delta-e_1-y) + \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}_x - x\right)\int_0^{\frac{\mathrm{L}}{2}} f(s)\,ds - \int_s^{\frac{\mathrm{L}}{2}}(\xi - x) f(\sigma)$$

En ajoutant ces deux équations, nous trouvons

$$\mathrm{E}(\mathrm{I}+\mathrm{I}_1)\frac{d^2y}{ds^2} = (\mathrm{P}=\mathrm{Q})(\delta-y) + \mathrm{P}e + \mathrm{Q}e_1,$$

et en faisant

$$(a) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{P}-\mathrm{Q}}{\mathrm{E}(\mathrm{I}+\mathrm{I}_1)} = a^2, \\ \dfrac{\mathrm{P}e+\mathrm{Q}e_1}{\mathrm{E}(\mathrm{I}+\mathrm{I}_1)} = \mathrm{B}, \end{array}\right.$$

nous avons

$$\frac{d^2y}{ds^2} = a^2(\delta-y) + \mathrm{B}.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$(b) \qquad a^2(\delta-y) + \mathrm{B} = \mathrm{C}_1 \sin as + \mathrm{C}_2 \cos as.$$

On a d'ailleurs

pour $s = 0$, $y = 0$ et $\frac{dy}{ds} = 0$; pour $s = \frac{1}{2}\mathrm{L}$, $y = \delta$,

d'où l'on tire

$$\mathrm{C}_1 = 0,$$
$$\mathrm{C}_2 = a^2\delta + \mathrm{B},$$
$$\delta = \frac{\mathrm{R}}{a^2}\,\frac{1-\cos\frac{1}{2}a\mathrm{L}}{\cos\frac{1}{2}a\mathrm{L}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (*b*) nous aurons

$$(c) \qquad y = \frac{\mathrm{B}}{a^2}\,\frac{1-\cos as}{\cos\frac{1}{2}a\mathrm{L}},$$

d'où l'on déduit

$$(d) \qquad \mathrm{M}_s = \mathrm{EI}\frac{d^2y}{ds^2} = \mathrm{EIB}\,\frac{\cos as}{\cos\frac{1}{2}a\mathrm{L}}.$$

La valeur maxima de M_s correspond à $\sin as = 0$, c'est-à-dire à $s = 0$, ce qui a lieu pour le milieu O de la diagonale; on a donc

$$(e) \qquad M_{max} = EIB \frac{1}{\cos \frac{1}{2} aL},$$

d'où l'on déduit que l'effort maximum par unité de surface, N_{max}, qui s'exerce au point le plus éloigné de la section dangereuse, est

$$(f) \qquad N_{max} = \frac{P}{\omega} + \frac{v_0}{I} \frac{EIB}{\cos \frac{1}{2} aL},$$

et d'après l'équation (a)

$$(27) \qquad N_{max} = \frac{P}{\omega} + \frac{v_0}{I + I_1} \frac{Pe + Qe_1}{\cos\left(\frac{1}{2} L \sqrt{\frac{P - Q}{E(I + I)}}\right)}.$$

Quand les forces P et Q sont égales et dirigées en sens opposés, les formules (e), (d) et (27) se réduisent à :

$$(e_1) \qquad M_s = \text{const} = M_{max} = EIB,$$

$$(27_1) \qquad N_{max} = \frac{P}{\omega} + \frac{v_0}{I + I_1} (Pe + Qe_1).$$

Quand $Q > P$, et lorsque ces forces sont dirigées en sens opposés, a est une quantité imaginaire; en faisant alors

$$a_1^2 = ai = \sqrt{\frac{Q - P}{E(I + I_1)}},$$

nous obtiendrons

$$(e_1) \qquad M_{max} = EIB \frac{1}{\cos \text{hyp} \frac{1}{2} a_1 L},$$

$$(27_3) \qquad N_{max} = \frac{P}{\omega} + \frac{v_0}{I + I_1} \frac{Pe + Qe_1}{\cos \text{hyp} \frac{1}{2} a_1 L}.$$

Si enfin la force Q agissait dans une direction opposée à celle qu'elle avait dans les cas considérés ci-dessus, c'est-à-dire si les deux systèmes de diagonales étaient comprimés, on trouverait pour M_{max} et N_{max} les mêmes formules (e) et (27), mais en y posant

$$(a_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} B &= \frac{Pe - Qe_1}{E(I + I_1)}, \\ a^2 &= \frac{P - Q}{E(I + I_1)}. \end{aligned} \right.$$

En appliquant ces formules aux constructions dans lesquelles les diagonales de chaque système n'ont pas les mêmes dimensions et ne sont pas soumises à des efforts égaux, comme nous l'avons supposé ici, on pourra déterminer deux limites entre lesquelles se trouve la valeur N_{max} pour une diagonale comprimée. Il suffira pour cela de substituer à Q, I et e, dans les formules (27), les valeurs correspondantes de la plus forte et de la plus faible des diagonales qui s'entre-croisent avec la diagonale considérée. On pourra, par mesure de précaution, se contenter de la limite inférieure (*).

Prenons, par exemple, en mesures russes :

$$P = 391^{pd}, \quad Q = 119^{pd}, \quad I = 2^{pc4},58, \quad I_1 = 1^{pc4},58,$$

$$\frac{P}{\omega} = 168, \quad v_0 = 1.001^{pc}, \quad e = 1.251^{pc}, \quad e_1 = 1.126^{pc},$$

$$L = 109^{pc} \quad \varepsilon = 780.000^{pd} \text{ par pouce carré,}$$

nous aurons

$$N_{max} = 168 + 171 = 339^{pd} \text{ par pouce carré} = 1,29\,R,$$

la charge de sécurité pour la compression simple étant de $R = 265^{pd}$ par pouce carré.

Dans les poutres à treillis symétriques, à diagonales excentriques, N_{max}, d'après la formule (27) dépasse dans la plupart des cas les charges admissibles de la compression simple R. Cependant, si la charge moyenne $\frac{P}{\omega}$ ne dépasse pas la limite de sécurité déterminée d'après les formules du cas XI, l'excédent de N_{max} sur R n'est pas, en général, supérieur à 33 p. 100.

Il ne faut pas oublier toutefois que la rivure des diagonales aux points d'intersections et aux nœuds ne réalise pas l'articulation prise comme point de départ pour l'établissement de la formule (27). Les angles formés par les axes des diagonales dans le plan du treillis ne pouvant se déformer librement, empêchent ces dernières de fléchir suivant des courbes planes, et les forcent d'affecter une forme gauche. Il est évident que cette circonstance, ainsi que la torsion de la semelle, augmentent la résistance au flambement des diagonales, et que, par conséquent, l'excédent

(*) Il est indispensable de remarquer qu'ayant déduit les formules (27), (27_1) et (27_2), de la même supposition que dans le cas XI, nous devons borner l'application de ces formules aux limites qui ont été établies pour la formule (11_2), savoir :

$$0 < Q < 2P \quad \text{et} \quad 0 < I_1 < \frac{3}{2}\,I.$$

de N_{max} sur R obtenu par la formule (27) est exagéré, et ne présente rien d'effrayant tant qu'il ne dépasse pas 33 p. 100.

Néanmoins il serait à recommander d'éviter les constructions excentriques, ce qui est toujours possible pour les diagonales principales; quant à celles du milieu de la travée qui doivent être placées d'un côté du treillis, il faut tâcher de diminuer les efforts secondaires auxquels elles sont soumises. On y arrive en diminuant, autant que possible, l'excentricité e et la valeur du rapport $\frac{v_0}{r}$.

NOTE D

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR DÉTERMINER LA VALEUR MAXIMA DE LA FORCE DE COMPRESSION QU'UNE VERGE ÉLASTIQUE PEUT SUPPORTER SANS FLÉCHIR.

Nous avons démontré, dans plusieurs cas particuliers considérés au chapitre I, que, pour déterminer la valeur maxima de la force de compression qu'une verge élastique, primitivement droite, peut supporter sans fléchir, on n'a pas besoin d'intégrer l'équation différentielle exacte de son axe fléchi, et que cette valeur peut être rigoureusement obtenue à l'aide d'une équation différentielle auxiliaire, composée d'une certaine façon d'après l'équation exacte. Essayons de généraliser cette méthode.

L'équation différentielle de l'axe fléchi d'une verge élastique comprimée par des forces, appliquées le long de son axe primitivement droit, peut être exprimée pour le cas général par la relation

$$(a) \qquad F(s, y, y', y'' \ldots\ldots y^n, p, q, r \ldots\ldots) = 0$$

où s et y désignent respectivement la longueur de l'arc de l'axe fléchi et son ordonnée; $y' y''' \ldots\ldots y^n$, les dérivées des différents ordres de y par rapport à s; $p, q, r, \ldots$ les paramètres, fonctions des forces et des réactions indépendantes des coordonnées. En outre, les données d'un problème bien déterminé, fournissent n équations de la forme :

$$(b) \qquad \begin{cases} f_1(s, y, y', y'' \ldots\ldots p, q, r \ldots\ldots)_{s=s_1} = 0 \\ f_2(s, y, y', y'' \ldots\ldots p, q, r \ldots\ldots)_{s=s_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(s, y, y', y'' \ldots\ldots p, q, r \ldots\ldots)_{s=s_n} = 0. \end{cases}$$

Ces équations nous serviront à éliminer les n constantes arbitraires de l'intégrale générale de l'équation (a).

Supposons qu'il ne s'agisse que de déterminer la valeur p_1 du paramètre p qui réduit l'équation de l'axe fléchi à

$$y = \text{const} = 0$$

en admettant, comme de raison, qu'une réduction pareille ne soit pas contraire aux conditions (b).

Transformons l'équation (a), en lui donnant la forme suivante, explicite par rapport au paramètre p :

$$(c) \qquad p = \frac{\varphi\,(s, y, y', y'' \,\ldots\ldots\, q, r \ldots\ldots)}{\psi\,(s, y, y', y'' \ldots\ldots\, q, r \ldots\ldots)}.$$

La valeur cherchée p_1 pourra être tirée de (c), en y substituant

$$(d) \qquad y = y' = y'' = \ldots\ldots = y^n = \text{const} = 0,$$

ce qui donnera

$$(e) \qquad p_1 = \chi\,(q, r \ldots\ldots).$$

Il pourrait arriver, cependant, que l'équation (e) se réduisît à la forme

$$(f) \qquad p_1 = \left[\frac{\varphi\,(s, y, y', y'' \ldots\ldots\, q, r \ldots\ldots)}{\psi\,(s, y, y', y'' \ldots\ldots\, q, r \ldots\ldots)}\right]_{y = \text{const} = 0} = \frac{0}{0}.$$

Dans ce dernier cas, l'axe de la verge peut rester droit pour toute valeur de p, c'est-à-dire l'équation $y = \text{const} = 0$ est une intégrale particulière de (a). Mais, outre cette forme particulière, l'intégrale générale peut contenir encore d'autres intégrales, satisfaisant aux conditions (b) et présentant des familles de courbes, qui ne coïncident avec l'axe des x que pour $p = p_1$.

La question qui nous occupe consiste dans la détermination de ces valeurs particulières de p_1, sans intégrer l'équation (a), ce qui, actuellement, serait impossible dans la plupart des cas.

En vertu du principe de la relation graduellement continue existant entre les forces et les déformations, nous pouvons admettre, que, si pour $p = p_1$ la fonction y et toutes ses dérivées par rapport à s, ainsi que le numérateur φ et le dénominateur ψ de l'équation (c), se réduisent à 0 pour toutes les valeurs de s entre 0 et l, toutes ces fonctions y, y'..., φ, ψ, pour $p = p_1 + dp$, ne peuvent avoir des valeurs finies et restent, en général, infiniment petites sur toute la longueur de l'axe de la verge. Il s'ensuit que la valeur cherchée de p_1 peut être considérée comme la limite vers laquelle tend le quotient (c) quand la fonction y tend vers $y = \text{const} = 0$, c'est-à-dire que l'on a

$$(f) \qquad p_1 = \lim \left[\frac{\varphi\,(s, y, y', y'' \ldots\ldots\, q, r \ldots\ldots)}{\psi\,(s, y, y', y'' \ldots\ldots\, q, r \ldots\ldots)}\right]_{y = \text{const} = 0.}$$

Mais évidemment cette limite restera invariable en ajoutant au numérateur et au dénominateur des fonctions arbitraires φ_1 et f_1 telles, que pour $p = p_1 + dp$ et pour toutes les valeurs de s comprises entre 0 et l, elles ne puissent avoir que des valeurs infiniment petites d'ordre supérieur à celui de φ et χ; par conséquent

$$(g) \qquad p_1 = \lim \left[\frac{\varphi(\ldots\ldots) \pm \varphi_1(\ldots\ldots)}{\psi(\ldots\ldots) \pm \psi_1(\ldots\ldots)}\right]_{y=\text{const}=0.}$$

L'équation (g) restant exacte pour toutes les valeurs de s entre 0 et l, p_1 doit, en général, satisfaire à l'équation différentielle

$$(h) \qquad p\,[\psi(\ldots\ldots) \pm \psi_1(\ldots\ldots)] = \varphi(\ldots\ldots) \pm \varphi_1(\ldots\ldots),$$

à la limite, lorsque l'intégrale y de cette équation satisfaisant aux conditions (b) se confond avec 0.

Cette valeur p_1, tirée de (g) en y substituant $y, y', y'' \ldots\ldots y^n$, déterminées en fonctions de $s, p, q, r \ldots\ldots$, d'après l'équation (h) et satisfaisant aux conditions (b), sera absolument identique à la valeur p_1, déduite de f en y substituant $y, y', y'' \ldots\ldots y^n$ déterminées aux mêmes conditions de l'intégrale de l'équation (a).

On peut, par conséquent, pour obtenir la solution exacte du problème en question, intégrer l'équation auxiliaire de la forme (h), et après avoir éliminé les constantes arbitraires à l'aide des conditions (b), déterminer p_1 comme la limite vers laquelle tend p, quand la fonction y tend vers 0 sur toute la longueur de la verge. Un heureux choix des fonctions φ_1 et ψ_1, nous permettra de donner à l'équation (h) une forme intégrable, par exemple la forme linéaire.

Il va de soi que l'équation (h) doit être du même ordre que l'équation (a).

La méthode exposée nous donne la vraie raison de ce fait, que l'analyse sommaire a pu amener Euler à la solution exacte du problème de la force de la colonne (cas Ier). En effet, nous avons dans ce cas

$$a = \lim \left[\frac{y''}{(\delta - y)\sqrt{1-(y')^2}}\right]_{y=\text{const}=0} = \lim \left(\frac{y''}{\delta - y}\right)_{y=\text{const}=0}$$

Par conséquent, l'intégrale de l'équation auxiliaire $a^2(\delta - y) = y''$, astreinte aux conditions

$$(h) \qquad \begin{cases} (y)_{s=0} = 0 \\ (y')_{s=0} = 0 \end{cases}$$

devait donner pour a_1^2 une solution identique à celle de l'équation exacte.

Il est facile de voir que des solutions identiques pour a_1^2 peuvent être obtenues de toute autre équation différentielle composée d'après l'équation exacte selon la méthode indiquée; par exemple, de l'équation

$$(i) \qquad a_1^2 = \lim \left[\frac{y''}{\delta - y + y\delta^m}\right]_{y=\text{const}=0}$$

où $m > 1$ (*).

En effet, l'équation (i) donne

$$a^2(1-\delta^m)\left(\frac{1-\delta^m}{\delta} - y\right) = y'',$$

dont l'intégrale générale est

$$y = \frac{1-\delta^m}{\delta} + C_1 \sin\left(as\sqrt{1-\delta^m}\right) + C_2 \cos\left(as\sqrt{1-\delta^m}\right).$$

En éliminant C_1, C_2 d'après les conditions (b_1), nous arrivons à l'équation

$$(k) \qquad y = \frac{\delta}{1-\delta^m}\left[1 - \cos\left(as\sqrt{1-\delta^m}\right)\right].$$

Or, comme $(y)_{s=l_1} = \delta$, nous avons aussi

$$(l) \qquad 1 = \frac{1}{1-\delta^m}\left(1 - \cos a\, l_1 \sqrt{1-\delta^m}\right).$$

Les équations (k) et (l) constituent l'intégrale de (i), satisfaisant aux conditions du problème. Il est clair que la fonction y ne peut atteindre la forme $y = \text{const} = 0$ que pour $\delta = 0$, ce qui, d'après l'équation (l), ne peut arriver que dans le cas où

$$1 = 1 - \cos a_1 l;$$

on en déduit

$$a_1 l_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

et définitivement

$$a_1^2 = \frac{\pi_1}{EI} = \frac{\pi^2}{4 l_1^2}(1+2n)^2,$$

solution identique à la solution connue que donne l'analyse exacte du cas Ier.

Prenons encore comme exemple l'équation

$$(m) \qquad a_1^2 = \lim\left(\frac{y''}{\delta - y - s\delta^m y'}\right)_{y=\text{const}=0},$$

(*) Quand la fonction y est infiniment petite pour toutes valeurs de s, comprises entre 0 et l, la valeur particulière δ est également infiniment petite, et, par conséquent, $y\delta^n$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à celui de $(\delta - y)$.

où, pour $a^2 = a_1^2 + d(a^2)$, le terme $s\delta^m y'$ est infiniment petit d'ordre supérieur que $\delta - y$.

L'équation auxiliaire à intégrer sera

$$(n) \qquad y'' + a^2 s \delta^m y' + a^2 (y - \delta) = 0.$$

En y introduisant de nouvelles variables θ et u, liées aux anciennes par les relations

$$(o) \qquad \begin{cases} y - \delta = \theta, \\ s = l_1 u, \end{cases}$$

elle se transformera en l'équation suivante

$$\frac{1}{l_1^2} \frac{d^2\theta}{du^2} + a^2 \delta^m u \frac{d\theta}{du} + a^2 \theta = 0,$$

et, en posant

$$a^2 l_1^2 = b^2,$$

on aura

$$(p) \qquad \frac{d^2\theta}{du^2} + b^2 \delta^m u \frac{d\theta}{du} + b^2 \theta = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation, développée en séries selon la méthode des coefficients indéterminés, est :

$$(r) \begin{cases} \theta = C_1 \theta_1 + C_2 \theta_2 \\ \theta_1 = 1 - \frac{b^2}{2} u^2 + \sum_\infty \left[-A_{n-1} \frac{2(n-1)\delta^m + 1}{2n(2n-1)} b^2 u^{2n} \right] \\ \theta_2 = u - \frac{\delta^m + 1}{3'} b^2 u^3 + \sum_\infty^2 \left[-B_{n-1} \frac{2(n-1)\delta^m + 1}{2n(2n+1} b^2 u^{2n+1} \right] \ldots\ldots \end{cases}$$

où A_k et B_k désignent respectivement des $k^{\text{tièmes}}$ membres des séries θ_1 et θ_2. Les conditions (b), savoir

$$(b_2) \qquad (y)_{s=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dy}{ds}\right)_{s=0} = 0,$$

donnent, d'après l'équation (o),

$$(\theta)_{u=0} = \delta, \qquad \left(\frac{d\theta}{du}\right)_{u=0} = 0.$$

D'après l'équation (r), la dernière de ces conditions se réduit à

$$C_1 \left(\frac{d\theta_1}{du}\right)_{u=0} + C_2 \left(\frac{d\theta_2}{du}\right)_{u=0} = 0.$$

Or, comme on a

$$\left(\frac{d\theta_1}{du}\right)_{u=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\theta_2}{du}\right)_{u=0} = 1,$$

il faut que l'on ait

$$C_2 = 0 \quad \text{et} \quad \theta = C_1 \theta_1.$$

CHAPITRE III.

APPLICATIONS.

Note A.

Note B.

Note C.

Note D.

PARIS. — IMP. C. MARPON ET E. FLAMMARION, RUE RACINE, 26.

ır la résistance
ıs.

SUPPLÉMENT AUX MÉMOIRE

Recherches sur la flexion des pièces comprimées

par M. Félix Jasinski.

ERRATA.

Page	8	ligne	25	au lieu de	$E\pi^2\left(\frac{r}{6,5\,l_3}\right)^2$	lire	$E\pi^2\left(\frac{r}{0,5\,l_3}\right)^3$
»	12	»	12	»	$p\int_s^{l_5}\eta\,d\rho$	»	$p\int_s^{l_5}\eta\,d\sigma$
»	13	»	9	»	$y(l_5-)$	»	$y(l_5-s)$
»	14	»	7	»	$-\frac{p}{EI}(l_3-s)$	»	$-\frac{p}{EI}(l_5-s)$
»	15	»	24	»	$C_1\frac{d\theta_1}{du}+C_2\frac{d\theta_2}{du}=0$	»	$\left[C_1\frac{d\theta_1}{du}+C_2\frac{d\theta_2}{du}\right]_{u=0}=0$
»	18	»	8	»	$=7,838\,E\left(\frac{r}{l_5}\right)^2$	»	$=7,837\,E\left(\frac{r}{l_5}\right)^2$
»	20	»	17	»	M_5	»	M_s
»	22	»	11	»	$\sum_{\infty}^{2}\frac{a^2u^{2n-2}}{(2n-2)(2n-1)}$	»	$\sum_{\infty}^{2}\frac{a^2u^{2n-1}}{(2n-2)(2n-1)}$
»	24	»	7	»	$=5,125\,E\left(\frac{r}{l_7}\right)$	»	$=5,125\,E\left(\frac{r}{l_7}\right)^2$
»	24	»	10	»	$=1,387\,h_e$	»	$=1,3876$
»	26	»	22 et 23	au lieu de			

$$(\xi-x)=\int_s^\sigma\frac{d\xi}{d\sigma}d\sigma=\int_s^\sigma\sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}\,d\sigma\ (x_1-x)$$

$$=\int_s^l\sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}\,d\sigma$$

lire

$$(\xi-x)=\int_s^\sigma\frac{d\xi}{d\sigma}d\sigma=\int_s^\sigma\sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}\,d\sigma$$

$$(x_1-x)=\int_s^l\sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}\,d\sigma$$

Page	27	ligne	6	au lieu de	$\frac{dq}{d\sigma}, \frac{d^2y}{ds^2}$ et $\frac{d^2q}{d\sigma^2}$.	lire	$\frac{d\eta}{d\sigma}, \frac{d^2y}{ds^2}$ et $\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}$
»	32	»	26	»	fig. 10	»	fig. 9.
»	33	»	12	»	$\frac{P''\delta}{X_2}$	»	$\frac{P''\delta}{x_a}$

» 33 » 20 au lieu de

$$= - \frac{b_1^2\delta \int_0^{l'} \sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2}\, ds_1}{\int_0^{l'} \sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2}\, ds_1 + \int_s^{l''} \sqrt{1-\left(\frac{dy_2}{ds_2}\right)^2}\, ds_2 - a_1^2 y_1}$$

lire

$$= - \frac{b_1^2\delta \int_0^{l'} \sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2}\, ds_1}{\int_0^{l'} \sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2}\, ds_1 + \int_0^{l''} \sqrt{1-\left(\frac{dy_1}{ds_2}\right)^2}\, ds_2} - a_1^2 y_1$$

Page	34	ligne	4	au lieu de	$\frac{b_1^2\delta}{y_0}$	lire	$\frac{b_1^2\delta}{y_1}$
»	34	»	7	»	$h_1^2\frac{\delta}{l_{10}}$	»	$b_1^2\frac{\delta}{l_{10}}$
»	34	»	12	»	$h_2^2\frac{\delta}{l_{10}}$	»	$b_2^2\frac{\delta}{l_{10}}$
»	34	»	14	»	$h_2^2\frac{\delta}{l_{10}}$	»	$b_2^2\frac{\delta}{l_{10}}$
»	35	»	4	»	$-c_2 l_{10}$	»	$-c^2 l_{10}$
»	36	(table)		»	$\frac{P'+P''}{P''}$	»	$\frac{P'+P''}{P'}$

Page 39 ligne 10 au lieu de

$$\frac{EI}{\rho} = -Q(\delta - y) + (x_1 - x)\int_0^{\frac{1}{2}l_{11}} f(y)\, ds + \int_s^{\frac{1}{2}l_{11}} (\xi - x) f(\eta)\, d\sigma$$

lire

$$\frac{EI_1}{\rho} = -Q(\delta - y) + (x_1 - x)\int_0^{\frac{1}{2}l_{11}} f(y)\, ds - \int_s^{\frac{1}{2}l_{11}} (\xi - x) f(\eta)\, d\sigma$$

Page 46 ligne 8 au lieu de $\int_s^{\frac{1}{2}l_{12}} f(\eta)(\eta - s)\, d\sigma$ lire $\int_s^{\frac{1}{2}l_{12}} f(\eta)(\sigma - s)\, d\sigma$

» 54 aux dessus de la seconde table au lieu de «libres» lire «platès»

» 54 seconde table colonne 5-e au lieu de 115,7 lire 112,7

» 54 » » » 5-e » 112,5 » 115,5

